

Fișă de lucru

Lecția 8 – Sfera

Clasa a 8-a – Capitolul 2 – Aree și volume ale unor corpuri geometrice

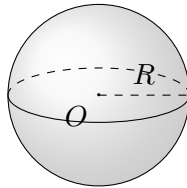
Instrucțiuni

Rezolvă exercițiile folosind formulele specifice sferei. *Reține:* Aria sferei $A = 4\pi R^2$, Volumul sferei $V = \frac{4\pi R^3}{3}$. Durata recomandată: **45–50 minute**.

Exerciții

Exercițiul 1. O sferă are raza $R = 6$ cm. Calculați:

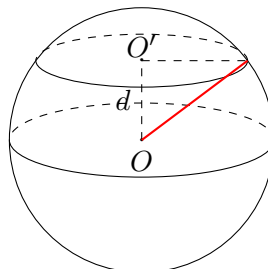
- (a) Aria sferei.
- (b) Volumul sferei.



Exercițiul 2. Aria unei sfere este egală cu 324π cm². Calculați lungimea razei și volumul sferei.

Exercițiul 3. Un vas în formă de emisferă (jumătate de sferă) are diametrul de 12 cm. Calculați câți mililitri de apă încap în acest vas (capacitatea vasului).

Exercițiul 4. O sferă este secționată de un plan situat la distanța de 3 cm față de centrul sferei. Aria cercului de secțiune este 16π cm². Calculați raza sferei și aria totală a acesteia.

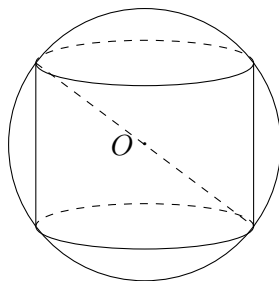


Exercițiul 5. Trei sfere metalice cu razele de 3 cm, 4 cm și 5 cm sunt topite împreună pentru a forma o singură sferă mare. Calculați raza sferei mari obținute.

Exercițiul 6. Un cub cu muchia de 10 cm este înscris într-o sferă (toate vârfurile cubului se află pe suprafața sferei). Calculați aria sferei.

Exercițiul 7. Un cilindru circular drept este înscris într-o sferă cu raza $R = 10$ cm. Știind că înălțimea cilindrului este egală cu raza bazei sale ($h = r_{cil}$), calculați:

- (a) Raza bazei cilindrului.
- (b) Raportul dintre volumul cilindrului și volumul sferei.



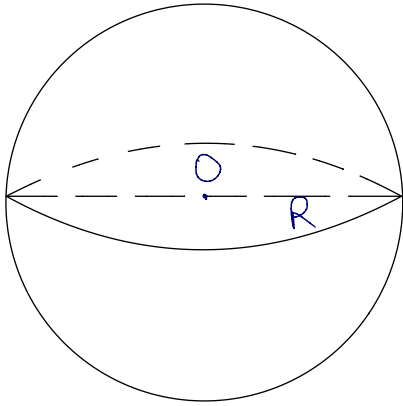
Exercițiul 8. Un cornet de înghețată are forma unui con circular drept cu înălțimea $h = 12$ cm și raza bazei $r = 5$ cm. Deasupra conului se pune o cupă de înghețată sub formă de semisferă cu aceeași rază ($r = 5$ cm).

- (a) Calculați volumul total al înghețatei (con + semisferă).
- (b) Calculați aria totală a solidului format.

Succes!

Exercițiul 1. O sferă are raza $R = 6$ cm. Calculați:

- (a) Aria sferei.
(b) Volumul sferei.



$$a) A = 4\pi R^2 = 4\pi \cdot 6^2 = 4\pi \cdot 36 = 144\pi \text{ cm}^2$$

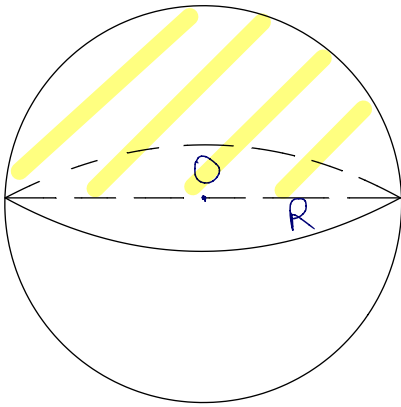
$$b) V = \frac{4\pi R^3}{3} = \frac{4\pi \cdot 6^3}{3} = \frac{4\pi \cdot 216}{3} = 288\pi \text{ cm}^3$$

Exercițiul 2. Aria unei sfere este egală cu $324\pi \text{ cm}^2$. Calculați lungimea razei și volumul sferei.

$$A_{\text{sferă}} = 4\pi R^2 \Rightarrow 4\pi R^2 = 324\pi / : 4 \Rightarrow R^2 = 81 \Rightarrow R = \sqrt{81} = 9 \text{ cm}$$

$$V_{\text{sferă}} = \frac{4\pi R^3}{3} = \frac{4\pi \cdot 9^3}{3} = \frac{4\pi \cdot 729}{3} \Rightarrow V_{\text{sferă}} = 972\pi \text{ cm}^3$$

Exercițiul 3. Un vas în formă de semisferă (jumătate de sferă) are diametrul de 12 cm. Calculați câți mililitri de apă încap în acest vas (capacitatea vasului).



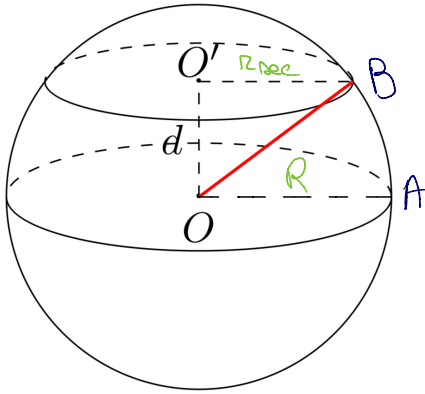
$$D = 12 \Rightarrow R = \frac{D}{2} = \frac{12}{2} = 6 \text{ cm}$$

$$V_{\text{sferă}} = \frac{4\pi R^3}{3} = \frac{4\pi \cdot 6^3}{3} = \frac{4\pi \cdot 216}{3} = 288\pi \text{ cm}^3$$

$$V_{\text{semisferă}} = \frac{V_{\text{sferă}}}{2} = \frac{288\pi}{2} = 144\pi \text{ cm}^3$$

$$144\pi \text{ cm}^3 \simeq 144 \cdot 3,14 \text{ cm}^3 \simeq 452,16 \text{ cm}^3 = 452,16 \text{ ml}$$

Exercițiul 4. O sferă este secționată de un plan situat la distanța de 3 cm față de centrul sferei. Aria cercului de secțiune este $16\pi \text{ cm}^2$. Calculați raza sferei și aria totală a acesteia.



$$O'O = 3 \text{ cm}; O'B = r_{\text{sec}}; OA = R$$

$$A_{\text{secțiune}} = \pi \cdot O'B^2 = \pi \cdot r_{\text{sec}}^2 = \pi \cdot 16$$

$$\Rightarrow r_{\text{sec}} = \sqrt{16} = 4 \text{ cm}$$

În $\triangle OO'B$ dreptunghic aplic T.P.:

$$OB^2 = O'O^2 + O'B^2 = 3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25 \Rightarrow OB = \sqrt{25} = 5 \text{ cm}$$

Dar, $OB = R = OA = 5 \text{ cm}$ (ambele sunt raze ale sferei)

$$A_{\text{sferă}} = 4\pi R^2 = 4\pi \cdot 5^2 = 4\pi \cdot 25 = 100\pi \text{ cm}^2$$

Exercițiul 5. Trei sfere metalice cu razele de 3 cm, 4 cm și 5 cm sunt topite împreună pentru a forma o singură sferă mare. Calculați raza sferei mari obținute.

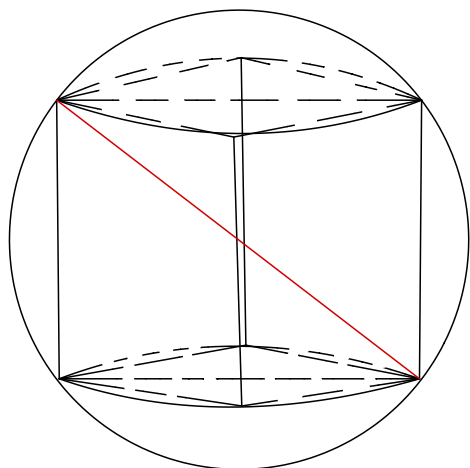
Calculăm suma volumelor celor 3 sfere metalice (care însumate, de fapt, volumul sferei mari) și din aceasta calculăm raza sferei mari.

$$V_1 = \frac{4\pi R_1^3}{3}; V_2 = \frac{4\pi R_2^3}{3}; V_3 = \frac{4\pi R_3^3}{3}$$

$$V = V_1 + V_2 + V_3 \Rightarrow V = \frac{4\pi}{3}(R_1^3 + R_2^3 + R_3^3) = \frac{4\pi}{3}(3^3 + 4^3 + 5^3) = \frac{4\pi}{3}(27 + 64 + 125)$$

$$\Rightarrow V = \frac{4\pi}{3} \cdot 216 \quad \left. \begin{array}{l} \\ V = \frac{4\pi R^3}{3} \end{array} \right\} \Rightarrow R^3 = 216 \Rightarrow R = 6 \text{ cm}$$

Exercițiul 6. Un cub cu muchia de 10 cm este înscris într-o sferă (toate vârfurile cubului se află pe suprafața sferei). Calculați aria sferei.



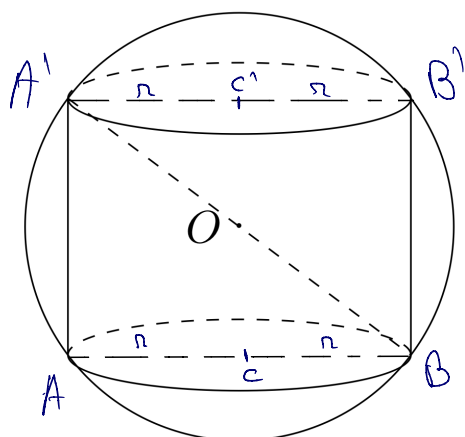
Obs. Diagonala unui cub înscris într-o sferă reprezintă diametrul sferei și trece prin centrul sferei.

$$\left. \begin{aligned} d_{\text{cub}} &= 10\sqrt{3} \Rightarrow d_{\text{cub}} = 10\sqrt{3} \\ D &= 2R = d_{\text{cub}} \end{aligned} \right\} \Rightarrow 2R = 10\sqrt{3} : 2 \\ R = 5\sqrt{3}$$

$$A_{\text{sferă}} = 4\pi R^2 = 4\pi \cdot (5\sqrt{3})^2 = 4\pi \cdot 25 \cdot 3 = 300\pi \text{ cm}^2$$

Exercițiul 7. Un cilindru circular drept este înscris într-o sferă cu raza $R = 10$ cm. Știind că înălțimea cilindrului este egală cu raza bazei sale ($h = r_{\text{cil}}$), calculați:

- Raza bazei cilindrului.
- Raportul dintre volumul cilindrului și volumul sferei.



a) Observația de la ex. 6 este valabilă și aici.

Secțiunea axială a cilindrului este un dreptunghi înscris în cercul mare al sferei.

Diagonala dreptunghiului = diametrul sferei

$$\Rightarrow A'B = 2 \cdot R = 20 \text{ cm}$$

n = raza bazei cilindrului

$$R = n \Rightarrow A'A = AC = CB = n \Rightarrow AB = 2 \cdot A'A = 2n$$

$$\text{În } \triangle A'AB \text{ dreptunghic aplic T.P.: } A'A^2 + AB^2 = A'B^2 \Rightarrow n^2 + (2n)^2 = 20^2$$

$$\Rightarrow n^2 + 4n^2 = 400 \Rightarrow 5n^2 = 400 \Rightarrow n^2 = \frac{400}{5} = 80 \Rightarrow n = \sqrt{80} = 4\sqrt{5} \text{ cm}$$

$$b) V_{\text{cil}} = \pi n^2 h = \pi \cdot n^2 \cdot n = \pi \cdot n^3 = \pi \cdot (4\sqrt{5})^3 = \pi \cdot 4^3 \cdot (\sqrt{5})^3 = \pi \cdot 64 \cdot 5\sqrt{5} = 320\pi\sqrt{5} \text{ cm}^3$$

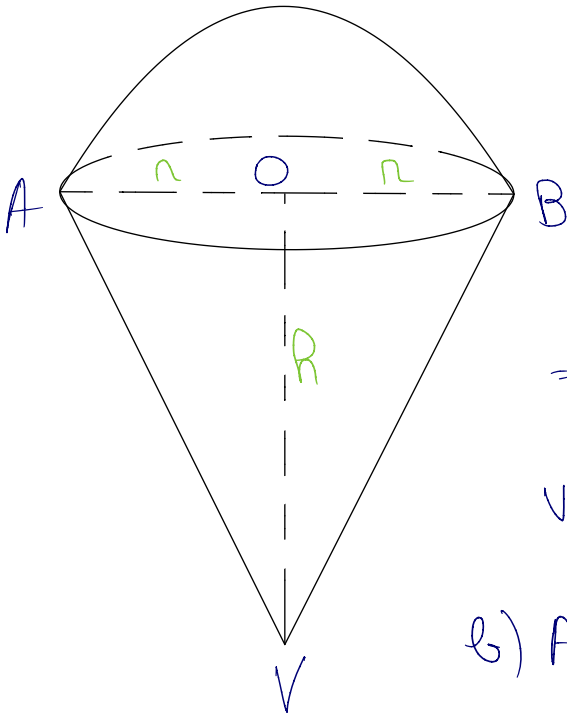
$$V_{\text{sferă}} = \frac{4\pi R^3}{3} = \frac{4\pi \cdot 10^3}{3} = \frac{4000\pi}{3} \text{ cm}^3$$

$$\frac{V_{\text{cil}}}{V_{\text{sferă}}} = \frac{320\pi\sqrt{5}}{\frac{4000\pi}{3}} = \frac{320\sqrt{5}}{4000} \cdot \frac{3}{1} = \frac{6\sqrt{5}}{25}$$

Exercițiul 8. Un cornet de înghețată are forma unui con circular drept cu înălțimea $h = 12$ cm și raza bazei $r = 5$ cm. Deasupra conului se pune o cupă de înghețată sub formă de semisferă cu aceeași rază ($r = 5$ cm).

(a) Calculați volumul total al înghețatei (con + semisferă).

(b) Calculați aria totală a solidului format.



$$a) V_{\text{con}} = \frac{\pi \cdot r^2 \cdot h}{3} = \frac{\pi \cdot 5^2 \cdot 12}{3} = \pi \cdot 25 \cdot 4$$

$$V_{\text{con}} = 100\pi \text{ cm}^3$$

$$V_{\text{semisferă}} = \frac{V_{\text{sferă}}}{2} = \frac{\frac{4\pi r^3}{3}}{2} = \frac{2\pi r^3}{3}$$

$$\Rightarrow V_{\text{semisferă}} = \frac{2\pi \cdot 125}{3} = \frac{250\pi}{3} \text{ cm}^3$$

$$V_{\text{total}} = V_{\text{con}} + V_{\text{semisferă}} = 100\pi + \frac{250\pi}{3} = \frac{550\pi}{3} \text{ cm}^3$$

$$b) A_t = A_{\text{lat.con}} + A_{\text{semisferă}}$$

$$A_{\text{lat.con}} = \pi \cdot r \cdot G$$

$$G = \sqrt{r^2 + h^2} \Rightarrow G = \sqrt{5^2 + 12^2} = \sqrt{25 + 144} = \sqrt{169} = 13 \text{ cm}$$

$$\Rightarrow A_{\text{lat.con}} = \pi \cdot 5 \cdot 13 = 65\pi \text{ cm}^2$$

$$A_{\text{semisferă}} = \frac{A_{\text{sferă}}}{2} = \frac{4\pi r^2}{2} = 2\pi r^2 = 2\pi \cdot 25 = 50\pi \text{ cm}^2$$

$$\Rightarrow A_t = 65\pi + 50\pi = 115\pi \text{ cm}^2$$