

Lecția 7 – Trunchiul de con circular drept

Clasa a 8-a – Capitolul 2 – Aree și volume ale unor corpuri geometrice

Instrucțiuni

Rezolvă exercițiile folosind formulele specifice trunchiului de con. *Formule:*

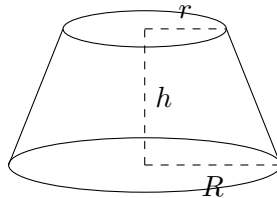
$$A_l = \pi G(R + r), A_t = A_l + A_B + A_b, V = \frac{\pi h}{3}(R^2 + r^2 + R \cdot r), G^2 = h^2 + (R - r)^2.$$

Durata recomandată: **50 minute**.

Exerciții

Exercițiul 1. Un trunchi de con circular drept are raza bazei mari $R = 8$ cm, raza bazei mici $r = 5$ cm și înălțimea $h = 4$ cm. Calculați:

- (a) Generatoarea trunchiului de con.
- (b) Aria laterală.



Exercițiul 2. Un trunchi de con are razele $R = 10$ cm, $r = 6$ cm și generatoarea $G = 5$ cm. Calculați înălțimea și volumul trunchiului de con.

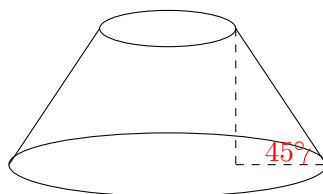
Exercițiul 3. Aria laterală a unui trunchi de con este 100π cm², iar generatoarea este de 10 cm. Știind că raza mare este dublul razei mici ($R = 2r$), calculați razele bazelor.

Exercițiul 4. Secțiunea axială a unui trunchi de con este un trapez isoscel cu bazele de 20 cm și 12 cm, iar înălțimea de 3 cm.

- (a) Calculați volumul trunchiului de con.
- (b) Calculați aria totală a trunchiului de con.

Exercițiul 5. Un con circular drept cu înălțimea de 24 cm și raza bazei de 12 cm este secționat de un plan paralel cu baza situat la distanța de 8 cm față de vârf. Calculați raportul volumelor dintre conul mic format și trunchiul de con obținut.

Exercițiul 6. Un trunchi de con are $R = 9$ cm și $r = 3$ cm. Generatoarea formează cu planul bazei mari un unghi de 45° . Calculați înălțimea, aria laterală și volumul trunchiului.



Exercițiul 7. Fie un trunchi de con cu razele $R = 12$ cm, $r = 6$ cm și înălțimea $h = 6\sqrt{3}$ cm.

- (a) Arătați că generatoarea face un unghi de 60° cu planul bazei mari.
- (b) Calculați distanța de la centrul bazei mari (O) la generatoarea trunchiului (G).

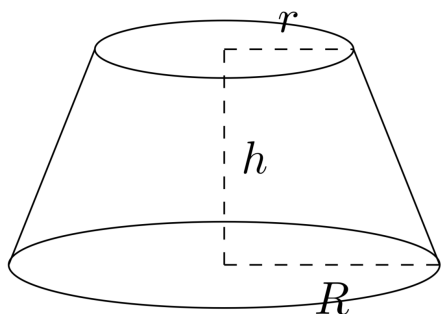
Exercițiul 8. Un trunchi de con are $R = 15$ cm, $r = 9$ cm și înălțimea $h = 8$ cm.

- (a) Determinați înălțimea conului din care provine trunchiul.
- (b) Calculați volumul conului inițial.
- (c) Calculați sinusul unghiului format de generatoare cu înălțimea trunchiului.

Succes!

Exercițiul 1. Un trunchi de con circular drept are raza bazei mari $R = 8$ cm, raza bazei mici $r = 5$ cm și înălțimea $h = 4$ cm. Calculați:

- (a) Generatoarea trunchiului de con.
(b) Aria laterală.



$$a) \quad G^2 = R^2 + (R-r)^2 = 4^2 + (8-5)^2 = 16 + 9 = 25 \\ \Rightarrow G = \sqrt{25} = 5 \text{ cm}$$

$$b) \quad A_l = \pi G(R+r) = \pi \cdot 5(8+5) = \pi \cdot 5 \cdot 13 = 65\pi \text{ cm}^2$$

Exercițiul 2. Un trunchi de con are razele $R = 10$ cm, $r = 6$ cm și generatoarea $G = 5$ cm. Calculați înălțimea și volumul trunchiului de con.

$$G^2 = R^2 + (R-r)^2 \Rightarrow R^2 = G^2 - (R-r)^2 = 5^2 - (10-6)^2 = 25 - 16 = 9$$

$$\Rightarrow R = \sqrt{9} = 3 \text{ cm}$$

$$V = \frac{\pi R}{3} (R^2 + r^2 + R \cdot r) = \frac{\pi \cdot 3}{3} (10^2 + 6^2 + 10 \cdot 6) = \pi (100 + 36 + 60)$$

$$\Rightarrow V = 196\pi \text{ cm}^3$$

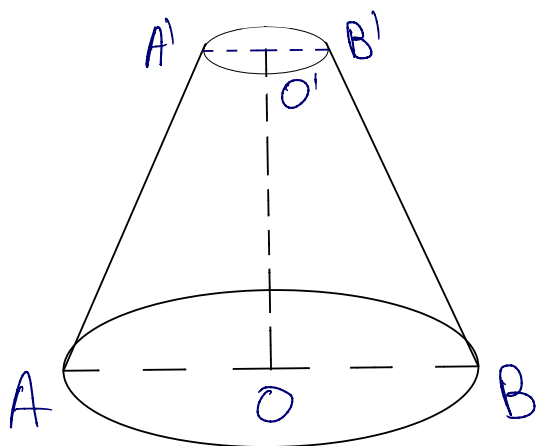
Exercițiul 3. Aria laterală a unui trunchi de con este $100\pi \text{ cm}^2$, iar generatoarea este de 10 cm. Știind că raza mare este dublul razei mici ($R = 2r$), calculați razele bazelor.

$$A_l = \pi G(R+r) \Rightarrow 100\pi = \pi \cdot 10(2r+r) \quad | :10 \Rightarrow 3r = 10 \quad | :3 \Rightarrow r = \frac{10}{3} \text{ cm}$$

$$R = 2 \cdot r \Rightarrow R = \frac{20}{3} \text{ cm}$$

Exercițiul 4. Secțiunea axială a unui trunchi de con este un trapez isoscel cu bazele de 20 cm și 12 cm, iar înălțimea de 3 cm.

- (a) Calculați volumul trunchiului de con.
(b) Calculați aria totală a trunchiului de con.



$$a) \quad AB = 20 \Rightarrow AO = OB = R = \frac{AB}{2} = \frac{20}{2} = 10 \text{ cm}$$

$$A'B' = 12 \Rightarrow A'O' = O'B' = r = \frac{A'B'}{2} = \frac{12}{2} = 6 \text{ cm}$$

$$V = \frac{\pi R}{3} (R^2 + r^2 + R \cdot r) = \frac{\pi \cdot 3}{3} (10^2 + 6^2 + 10 \cdot 6) = \pi (100 + 36 + 60) \Rightarrow V = 196\pi \text{ cm}^3$$

$$b) \quad A_t = A_l + A_B + A_{A'}$$

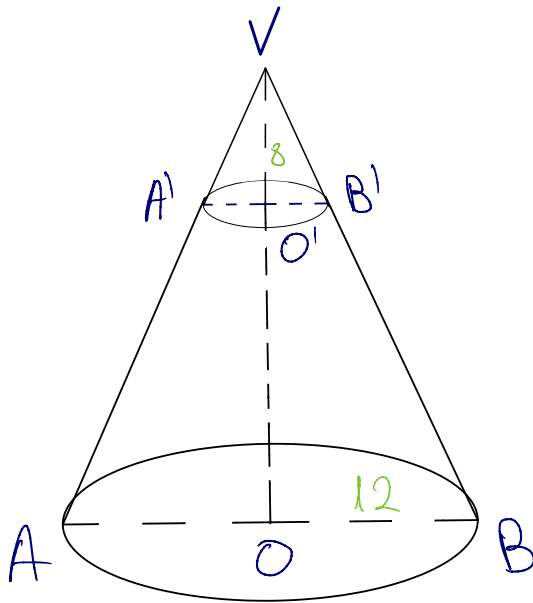
$$G^2 = R^2 + (R-r)^2 = 3^2 + (10-6)^2 = 9 + 16 = 25 \Rightarrow G = \sqrt{25} = 5 \text{ cm}$$

$$A_l = \pi G(R+r) = \pi \cdot 5(10+6) = 80\pi \text{ cm}^2$$

$$A_B = \pi R^2 = 100\pi \text{ cm}^2; \quad A_{A'} = \pi r^2 = 36\pi \text{ cm}^2$$

$$\left. \begin{array}{l} A_l = 80\pi \\ A_B = 100\pi \\ A_{A'} = 36\pi \end{array} \right\} \Rightarrow A_t = 80\pi + 100\pi + 36\pi = 216\pi \text{ cm}^2$$

Exercițiul 5. Un con circular drept cu înălțimea de 24 cm și raza bazei de 12 cm este secționat de un plan paralel cu baza situat la distanța de 8 cm față de vârf. Calculați raportul volumelor dintre conul mic format și trunchiul de con obținut.



$$\text{Raportul de asemănare: } R = \frac{R_{\text{mare}}}{R_{\text{mic}}} = \frac{10}{10'}$$

$$\Rightarrow R = \frac{24}{8} = 3$$

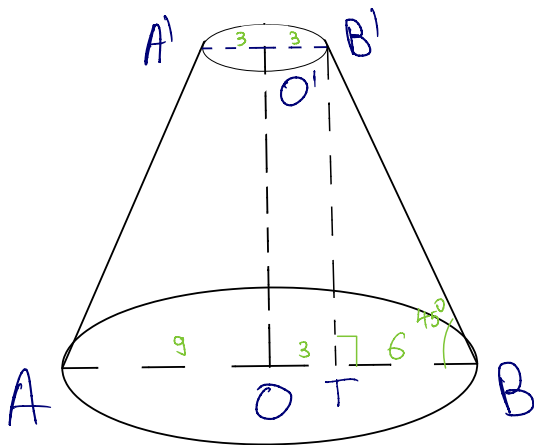
$$\frac{V_{VAB}}{V_{VA'B'}} = R^3 = 3^3 = 27 \Rightarrow V_{VAB} = 27 \cdot V_{VA'B'}$$

$$V_{\text{trunchi}} = V_{VAB} - V_{VA'B'} = 27 \cdot V_{VA'B'} - V_{VA'B'}$$

$$\Rightarrow V_{\text{trunchi}} = 26 \cdot V_{VA'B'}$$

$$\Rightarrow \frac{V_{VA'B'}}{V_{\text{trunchi}}} = \frac{V_{VA'B'}}{26 \cdot V_{VA'B'}} = \frac{1}{26}$$

Exercițiul 6. Un trunchi de con are $R = 9$ cm și $r = 3$ cm. Generatoarea formează cu planul bazei mari un unghi de 45° . Calculați înălțimea, aria laterală și volumul trunchiului.



Fie $B'T \perp AB, T \in AB$.

$$\left. \begin{array}{l} p_{(O,OB)} B' = T \\ p_{(O,OB)} B = B \end{array} \right\} \Rightarrow p_{(O,OB)} B'B = TB$$

$$\Rightarrow \angle B'BT = 45^\circ$$

În $\triangle B'TB$ dreptunghic, $\angle B'BT = 45^\circ \Rightarrow$

$$\triangle B'TB \text{ dreptunghic isoscel} \Rightarrow B'T = TB$$

$$\hookrightarrow B'B = TB\sqrt{2}$$

$$\left. \begin{array}{l} O'B' \parallel OT \\ O'O \parallel B'T \end{array} \right\} \Rightarrow O'OTB' \text{ paralelogram} \Rightarrow O'B' = OT = r = 3 \text{ cm}$$

$$TB = OB - OT = 9 - 3 = 6 \text{ cm} \Rightarrow B'T = 6 \text{ cm} = R = O'O$$

$$B'B = c \cdot \sqrt{2} = TB \cdot \sqrt{2} = 6\sqrt{2} \text{ cm} = G$$

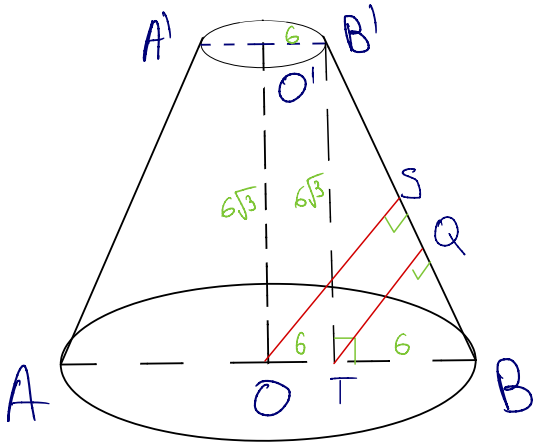
$$A_l = \pi G(R+r) = \pi \cdot 6\sqrt{2}(9+3) = \pi \cdot 6\sqrt{2} \cdot 12 \Rightarrow A_l = 72\pi\sqrt{2} \text{ cm}^2$$

$$V = \frac{\pi R}{3}(R^2 + r^2 + R \cdot r) = \frac{\pi \cdot 6^2}{3}(9^2 + 3^2 + 9 \cdot 3) = 2\pi(81 + 9 + 27) = 2\pi \cdot 117 \Rightarrow V = 234\pi \text{ cm}^3$$

Exercițiul 7. Fie un trunchi de con cu razele $R = 12$ cm, $r = 6$ cm și înălțimea $h = 6\sqrt{3}$ cm.

(a) Arătați că generatoarea face un unghi de 60° cu planul bazei mari.

(b) Calculați distanța de la centrul bazei mari (O) la generatoarea trunchiului (G).



a) Fie $B'T \perp AB, T \in AB$.

$O'T \perp B'T$ dreptunghic $\Rightarrow O'B' = OT = r = 6$ cm

$$O'O = B'T = h = 6\sqrt{3}$$
 cm

În $\triangle B'TB$ dreptunghic: $\tan \hat{B'TB} = \frac{B'T}{TB} = \frac{6\sqrt{3}}{6}$

$$\Rightarrow \tan \hat{B'TB} = \sqrt{3} \Rightarrow \hat{B'TB} = 60^\circ$$

b) Fie $OS \perp B'B, TQ \perp B'B, S, Q \in B'B$

$$\Rightarrow TQ \parallel OS$$

$TB = OB - OT = 12 - 6 = 6$ cm $\Rightarrow OT = TB$ $\Rightarrow SQ = QB \Rightarrow TQ$ linie mijlocie în $\triangle OSB$

$$\Rightarrow TQ = \frac{OS}{2}$$

În $\triangle B'TB$ aplic T.P.: $B'B^2 = B'T^2 + TB^2 = (6\sqrt{3})^2 + 6^2 = 36 \cdot 3 + 36 = 144$

$$\Rightarrow B'B = \sqrt{144} = 12$$
 cm

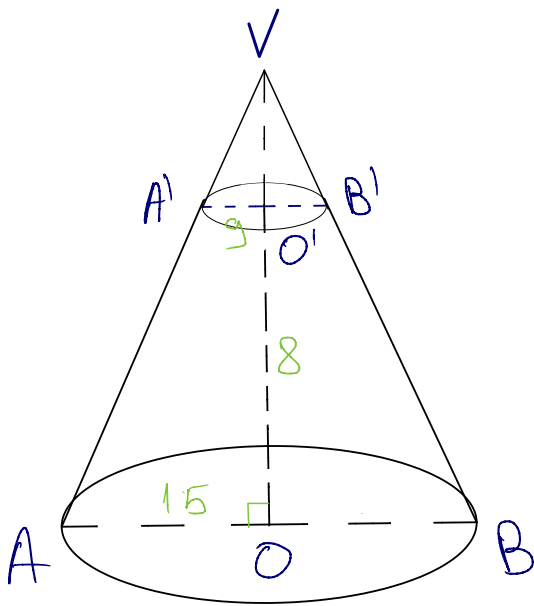
În $\triangle B'TB$ dreptunghic: $TQ = \frac{B'T \cdot TB}{B'B} = \frac{6\sqrt{3} \cdot 6}{12} = 3\sqrt{3}$ cm

$$OS = 2 \cdot TQ = 2 \cdot 3\sqrt{3} = 6\sqrt{3}$$
 cm $\Rightarrow d(O, B'B) = 6\sqrt{3}$ cm

$$OS \perp B'B \Rightarrow d(O, B'B) = OS$$

Exercițiul 8. Un trunchi de con are $R = 15$ cm, $r = 9$ cm și înălțimea $h = 8$ cm.

- Determinați înălțimea conului din care provine trunchiul.
- Calculați volumul conului inițial.
- Calculați sinusul unghiului format de generatoare cu înălțimea trunchiului.



a) Raportul de asemănare: $R = \frac{AB}{A'B'} = \frac{2 \cdot R}{2 \cdot r}$

$$\Rightarrow R = \frac{R}{r} = \frac{15}{9} = \frac{5}{3}$$

$$R = \frac{V_0}{V_0'} \quad \Rightarrow \quad \frac{V_0}{V_0'} = \frac{5}{3} \quad (\Rightarrow) \quad \frac{V_0}{V_0 - V_0'} = \frac{5}{5 - 3}$$

$$\Rightarrow \frac{V_0}{V_0 - V_0'} = \frac{5}{2} \Rightarrow 2 \cdot V_0 = 5 \cdot V_0' \Rightarrow V_0 = \frac{5 \cdot 8}{2} = 20 \text{ cm}$$

b) $V_{\text{con}} = \frac{\pi R^2 H}{3} = \frac{\pi \cdot 15^2 \cdot 20}{3} = \frac{\pi \cdot 225 \cdot 20}{3}$

$$\Rightarrow V_{\text{con}} = 1500\pi \text{ cm}^3$$

c) $\sin(\widehat{A'A, O'O}) = \sin(\widehat{AV, VO}) = \sin \widehat{AVO}$

În $\triangle VOA$ dreptunghic aplic T.P.: $VA^2 = VO^2 + OA^2 = 20^2 + 15^2 = 400 + 225$

$$\Rightarrow VA = \sqrt{625} = 25 \text{ cm}$$

$$\sin \widehat{AVO} = \frac{AO}{VA} = \frac{15}{25} = \frac{3}{5}$$