

Lecția 6 – Cilindrul circular drept

Clasa a 8-a – Capitolul 2 – Aree și volume ale unor corpuri geometrice

Instrucțiuni

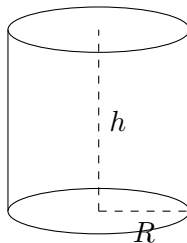
Rezolvă exercițiile folosind formulele specifice cilindrului circular drept. *Formule:* $A_l = 2\pi RG$, $A_t = 2\pi R(G + R)$, $V = \pi R^2 h$. (La cilindrul drept, $G = h$).

Durata recomandată: **50 minute**.

Exerciții

Exercițiul 1. Un cilindru circular drept are raza bazei $R = 4$ cm și înălțimea $h = 6$ cm. Calculați:

- (a) Aria laterală și aria totală a cilindrului.
- (b) Volumul cilindrului.



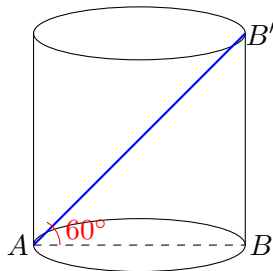
Exercițiul 2. Volumul unui cilindru circular drept este de 180π cm³, iar înălțimea este de 5 cm. Calculați lungimea razei bazei și aria laterală a cilindrului.

Exercițiul 3. Secțiunea axială a unui cilindru este un pătrat cu aria de 36 cm². Calculați raza, înălțimea și aria totală a cilindrului.

Exercițiul 4. Un cilindru circular drept are raza R și înălțimea h . Desfășurarea suprafeței laterale este un pătrat.

- (a) Determinați relația dintre înălțimea h și raza R .
- (b) Dacă raza $R = 2$ cm, calculați aria laterală a cilindrului.

Exercițiul 5. Diagonala secțiunii axiale a unui cilindru are lungimea de 10 cm și formează cu planul bazei un unghi de 60° . Calculați volumul cilindrului.



Exercițiul 6. Un cilindru cu raza $R = 5$ cm și înălțimea $h = 8$ cm este secționat de un plan paralel cu axa, situat la o distanță de 3 cm față de axa cilindrului. Calculați aria acestei secțiuni (dreptunghiul de secțiune).

Exercițiul 7. O furnică se deplasează pe suprafața laterală a unui cilindru circular drept, pornind dintr-un punct A al bazei inferioare și ajungând în punctul A' (proiecția lui A pe baza superioară), făcând o rotație completă în jurul cilindrului. Știind că raza cilindrului este $R = \frac{4}{\pi}$ cm și înălțimea $h = 6$ cm, calculați lungimea celui mai scurt drum parcurs de furnică.

Exercițiul 8. Se consideră cilindrul circular drept cu centrele bazelor O și O' , raza $R = 6$ cm și înălțimea $OO' = 6\sqrt{3}$ cm. Pe cercul bazei inferioare se iau punctele A și B astfel încât măsura arcului AB este de 120° .

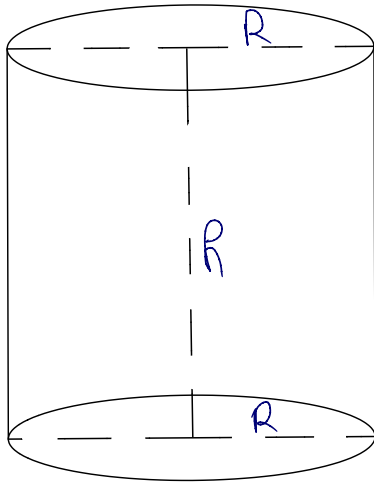
(a) Calculați lungimea coardei AB .

(b) Calculați distanța de la centrul bazei superioare O' la coarda AB .

Succes!

Exercițiul 1. Un cilindru circular drept are raza bazei $R = 4$ cm și înălțimea $h = 6$ cm. Calculați:

- (a) Aria laterală și aria totală a cilindrului.
(b) Volumul cilindrului.



$$\alpha) \begin{cases} A_l = 2\pi R h \\ h = R \end{cases} \Rightarrow A_l = 2\pi R h = 2\pi \cdot 4 \cdot 6 = 48\pi \text{ cm}^2$$

$$A_t = A_l + 2 \cdot A_b$$

$$A_b = \pi R^2 = \pi \cdot 4^2 = 16\pi \text{ cm}^2$$

$$\Rightarrow A_t = 48\pi + 2 \cdot 16\pi = 48\pi + 32\pi = 80\pi \text{ cm}^2$$

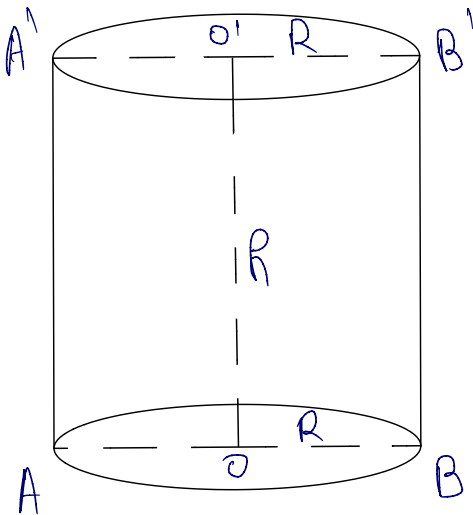
$$\beta) V = \pi R^2 h = \pi \cdot 4^2 \cdot 6 = \pi \cdot 16 \cdot 6 \Rightarrow V = 96\pi \text{ cm}^3$$

Exercițiul 2. Volumul unui cilindru circular drept este de $180\pi \text{ cm}^3$, iar înălțimea este de 5 cm. Calculați lungimea razei bazei și aria laterală a cilindrului.

$$V = \pi R^2 h \Rightarrow 180\pi = \pi \cdot R^2 \cdot 5 / : 5 \Rightarrow R^2 = 36 \Rightarrow R = \sqrt{36} = 6 \text{ cm}$$

$$A_l = 2\pi R h = 2\pi \cdot 6 \cdot 5 = 60\pi \text{ cm}^2$$

Exercițiul 3. Secțiunea axială a unui cilindru este un pătrat cu aria de 36 cm^2 . Calculați raza, înălțimea și aria totală a cilindrului.



$$ABB'A' \text{ pătrat} \Rightarrow AB = A'A \Rightarrow 2 \cdot R = h = R$$

$$\Rightarrow A_{ABB'A'} = R^2 \Rightarrow R^2 = 36 \Rightarrow R = \sqrt{36} = 6 \text{ cm}$$

$$\Rightarrow 2R = 6 / : 2 \Rightarrow R = 3 \text{ cm}$$

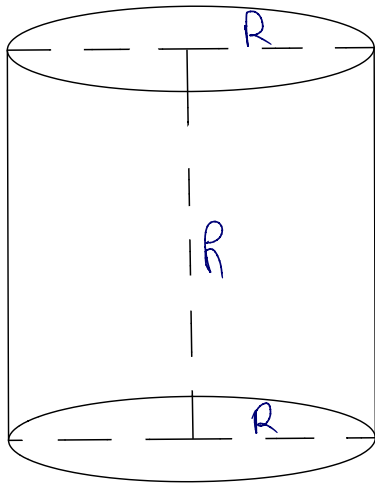
$$A_t = 2\pi R (h + R) \Rightarrow A_t = 2\pi \cdot 3 (6 + 3) = 6\pi \cdot 9$$

$$\Rightarrow A_t = 54\pi \text{ cm}^2$$

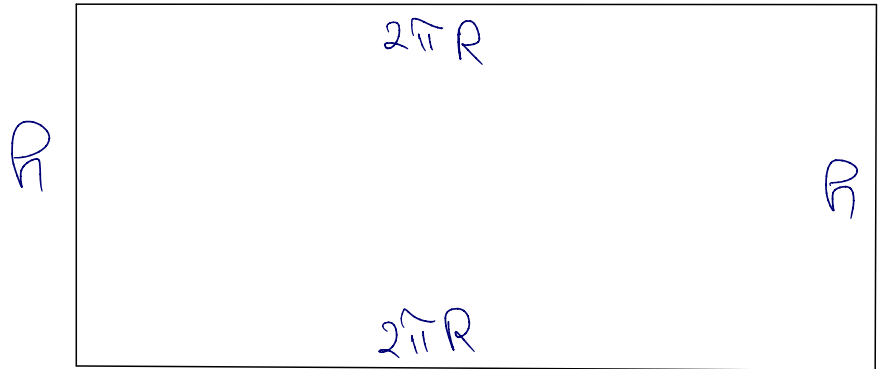
Exercițiul 4. Un cilindru circular drept are raza R și înălțimea h . Desfășurarea suprafeței laterale este un pătrat.

(a) Determinați relația dintre înălțimea h și raza R .

(b) Dacă raza $R = 2$ cm, calculați aria laterală a cilindrului.



Desfășurarea unui cilindru:



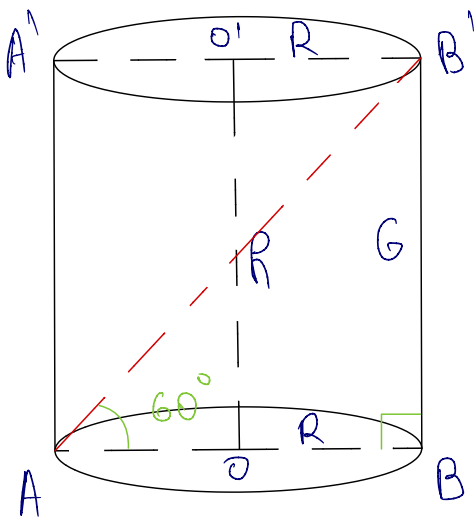
a) Obs. Desfășurarea unui cilindru este un dreptunghi cu laturile $L = 2\pi R$ (lungimea cercului) și $l = h$.

Fiind pătrat $\Rightarrow L = l \Rightarrow h = 2\pi R$

b) $R = 2 \Rightarrow h = 2\pi \cdot 2 \Rightarrow h = 4\pi$ cm

$A_l = 2\pi R h \Rightarrow A_l = 2\pi \cdot 2 \cdot 4\pi \Rightarrow A_l = 16\pi^2$ cm²

Exercițiul 5. Diagonala secțiunii axiale a unui cilindru are lungimea de 10 cm și formează cu planul bazei un unghi de 60° . Calculați volumul cilindrului.



$B'B \perp (G(0,0B))$
 $AB \in (G(0,0B)) \Rightarrow B'B \perp AB$

În $\triangle ABB'$ dreptunghic:

$$\sin \hat{B'AB} = \frac{B'B}{B'A} \Rightarrow \sin 60^\circ = \frac{G}{10} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{h}{10}$$

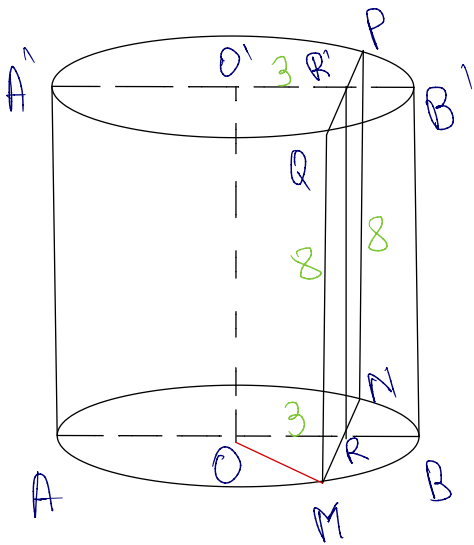
$$\Rightarrow h = \frac{10\sqrt{3}}{2} = 5\sqrt{3}$$

$$\cos \hat{B'AB} = \frac{AB}{B'A} \Rightarrow \cos 60^\circ = \frac{R}{10} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{R}{10}$$

$$\Rightarrow R = \frac{5}{2} = 2,5$$

$$V = \pi R^2 h \Rightarrow V = \pi \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^2 \cdot 5\sqrt{3} = \pi \cdot \frac{25}{4} \cdot 5\sqrt{3} \Rightarrow V = \frac{125\sqrt{3}}{4} \pi \text{ cm}^3$$

Exercițiul 6. Un cilindru cu raza $R = 5$ cm și înălțimea $h = 8$ cm este secționat de un plan paralel cu axa, situat la o distanță de 3 cm față de axa cilindrului. Calculați aria acestei secțiuni (dreptunghiul de secțiune).



$$O'R' = OR = 3 \text{ cm}$$

MNPQ este secțiunea paralelă din enunț.

$$MQ = NP = h = 8 \text{ cm}$$

$$OM = R = 5 \text{ cm}$$

În $\triangle ORM$ dreptunghic aplic T.P.:

$$OM^2 = OR^2 + RM^2 \Rightarrow RM^2 = 5^2 - 3^2 = 25 - 9 = 16$$

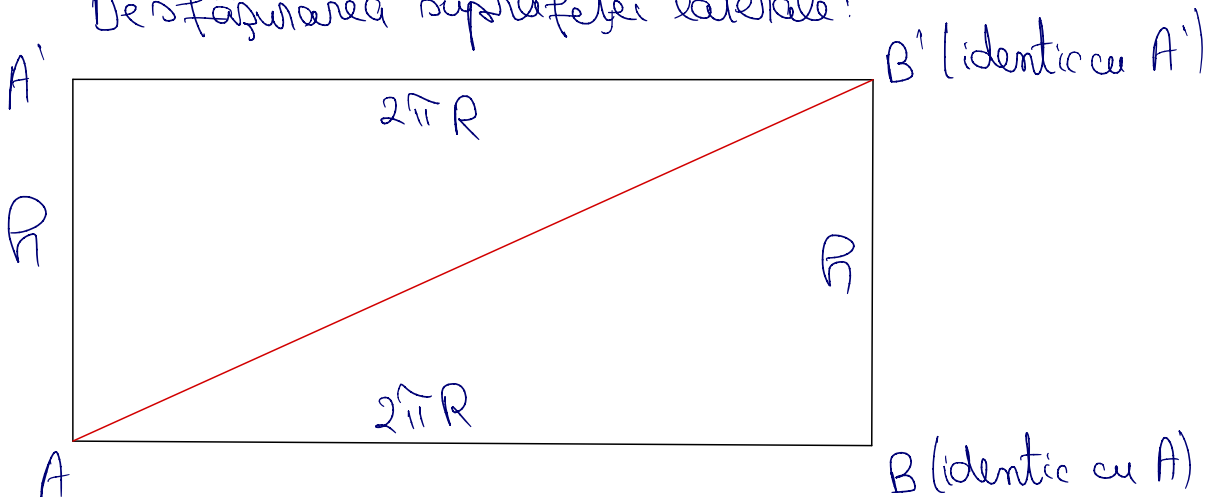
$$RM = \sqrt{16} = 4 \text{ cm}$$

$$MN = 2 \cdot RM = 2 \cdot 4 = 8 \text{ cm}$$

$$A_{MNPQ} = MQ \cdot MN = 8 \cdot 8 = 64 \text{ cm}^2$$

Exercițiul 7. O furnică se deplasează pe suprafața laterală a unui cilindru circular drept, pornind dintr-un punct A al bazei inferioare și ajungând în punctul A' (proiecția lui A pe baza superioară), făcând o rotație completă în jurul cilindrului. Știind că raza cilindrului este $R = \frac{4}{\pi}$ cm și înălțimea $h = 6$ cm, calculați lungimea celui mai scurt drum parcurs de furnică.

Desfășurarea suprafeței laterale:



Distanța minimă este reprezentată de lungimea diagonalei AB' din desfășurarea cilindrului. **Atenție:** Punctele A', B' precum și A, B sunt identice. Acestea sunt punctele în care se „leagă” cilindrul. Dar, pentru a afla lungimea, am schimbat notația lor.

În $\triangle B'BA$ dreptunghic aplic T.P. $\Rightarrow AB'^2 = AB^2 + BB'^2 \Rightarrow$

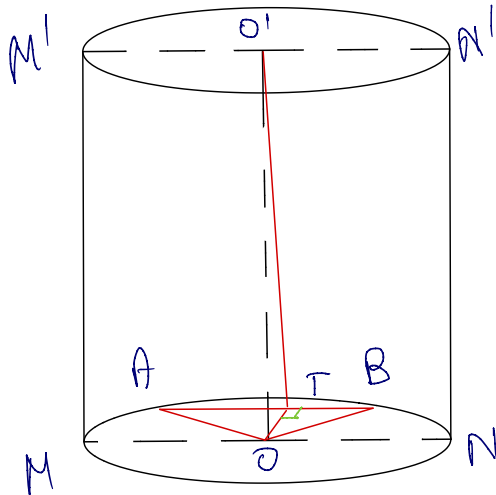
$$\Rightarrow AB'^2 = (2\pi R)^2 + h^2 = \left(2\pi \cdot \frac{4}{\pi}\right)^2 + 6^2 = 8^2 + 6^2 = 64 + 36 = 100$$

$$\Rightarrow AB' = \sqrt{100} = 10 \text{ cm}$$

Exercițiul 8. Se consideră cilindrul circular drept cu centrele bazelor O și O' , raza $R = 6$ cm și înălțimea $OO' = 6\sqrt{3}$ cm. Pe cercul bazei inferioare se iau punctele A și B astfel încât măsura arcului AB este de 120° .

(a) Calculați lungimea coardei AB .

(b) Calculați distanța de la centrul bazei superioare O' la coarda AB .



a) $M'MNN'$ cilindru, $\widehat{AB} = 120^\circ \Rightarrow \angle AOB = 120^\circ$

$OA = OB = R \Rightarrow \triangle OAB$ isoscel

Fie $OT \perp AB$, $T \in AB$.

$\triangle OAB$ isoscel $\Rightarrow OT$ mediană $\Rightarrow AT = TB = \frac{AB}{2}$

OT bisectoare $\Rightarrow \angle AOT = \angle BOT = \frac{\angle AOB}{2} = \frac{120^\circ}{2} = 60^\circ$

În $\triangle OTB$ dreptunghic:

$\angle OBT = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ \xrightarrow{T_{30^\circ}} OT = \frac{OB}{2} = \frac{6}{2} = 3 \text{ cm}$

În $\triangle OTB$ aplic T.P.: $TB^2 = OB^2 - OT^2 = 6^2 - 3^2 = 36 - 9 = 27$

$\Rightarrow TB = \sqrt{27} = 3\sqrt{3} \text{ cm}$

$AB = 2 \cdot TB \Rightarrow AB = 6\sqrt{3} \text{ cm}$

b) $O'O \perp (\mathcal{E}(O, OA))$
 $OT \perp AB$
 $OT, AB \subset (\mathcal{E}(O, OA))$ } $T_3 \perp \Rightarrow O'T \perp AB \Rightarrow d(O', AB) = O'T$

$O'O \perp (\mathcal{E}(O, OA))$
 $OT \subset (\mathcal{E}(O, OA))$ } $\Rightarrow O'O \perp OT \Rightarrow \triangle O'OT$ dreptunghic aplic T.P.:

$O'T^2 = O'O^2 + OT^2 = (6\sqrt{3})^2 + 3^2 = 36 \cdot 3 + 9 = 108 + 9 = 117$

$\Rightarrow O'T = \sqrt{117} = 3\sqrt{13} \text{ cm}$