

Lecția 4 - Unghiuri opuse la vârf

Clasa a 6-a – Capitolul Geometrie

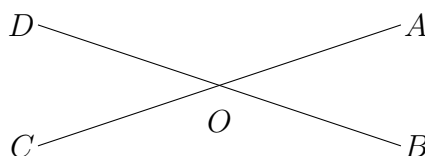
Instrucțiuni

Rezolvă exercițiile folosind definiția și proprietatea unghiurilor opuse la vârf: laturile lor sunt semidrepte opuse, iar măsurile lor sunt egale. Durata recomandată: **50 de minute**.

Exerciții

Exercițiul 1. Analizând figura de mai jos, stabiliți valoarea de adevăr a propozițiilor:

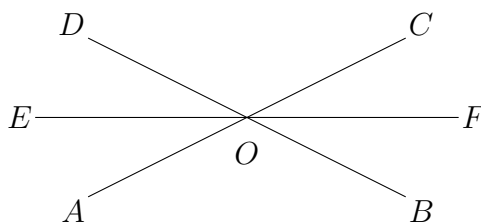
- (a) Unghiurile $\angle AOD$ și $\angle BOC$ sunt opuse la vârf.
- (b) Semidreptele OA și OC sunt semidrepte opuse.



- a) $A-O-C$ coliniare și $B-O-D$ coliniare $\Rightarrow \angle AOD$ este opus $\angle BOC$
Adevărat
- b) $O \in AC$, deci OA și OC formează $AC \Rightarrow OA$ și OC sunt opuse
Adevărat

Exercițiul 2. În figura alăturată, dreptele AC și BD sunt concurente în punctul O , iar EF trece prin O .

- (a) Enumerați două perechi de unghiuri opuse la vârf.
- (b) Dacă $m(\angle AOB) = 40^\circ$, determinați măsura unghiului $\angle COD$.

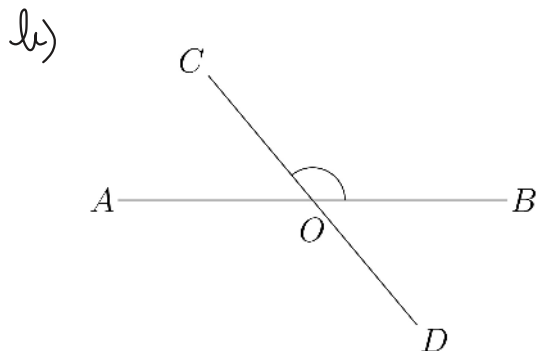


- a) $\angle AOB$ și $\angle COD$
 $\angle AOE$ și $\angle COF$
- ¹ b) *Deoarece $\angle AOB$ și $\angle COD$ sunt opuse la vârf, ele sunt congruente.*
 $m(\angle COD) = m(\angle AOB) = 40^\circ$

Exercițiul 3. Se consideră două drepte concurente care formează patru unghiuri în jurul punctului de intersecție. Dacă unul dintre unghiuri are măsura de 130° :

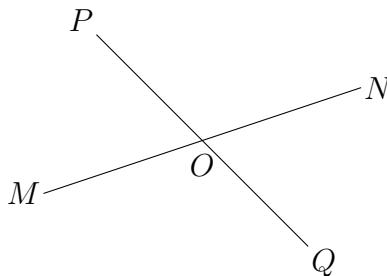
- Aflați măsurile celorlalte trei unghiuri.
- Realizați un desen corespunzător.

a) $\angle U_1, \angle U_2, \angle U_3, \angle U_4$
 $\angle U_1, \angle U_3$ - opuse la vârfuri $\Rightarrow m(\angle U_3) = m(\angle U_1) = 130^\circ$
 $\angle U_1, \angle U_2$ - suplementare $\Rightarrow m(\angle U_2) = 180^\circ - 130^\circ = 50^\circ$
 $\angle U_2, \angle U_4$ - opuse la vârf $\Rightarrow m(\angle U_4) = m(\angle U_2) = 50^\circ$



Exercițiul 4. În figura alăturată, dreptele MN și PQ se intersectează în punctul O . Se știe că $m(\angle MOQ) = 4x + 10^\circ$ și $m(\angle NOP) = 130^\circ$.

- Determinați valoarea lui x .
- Calculați măsura unghiului $\angle MOP$.

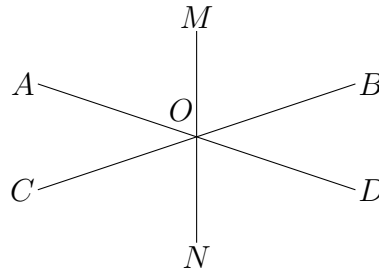


a) $\angle MOQ$ și $\angle NOP$ - opuse la vârf $\Rightarrow m(\angle MOQ) = m(\angle NOP)$
 $4x + 10^\circ = 130^\circ \quad | -10^\circ$
 $4x = 120^\circ \quad | :4$
 $x = 30^\circ$

b) $\angle MOP$ și $\angle NOP$ - suplementare $\Rightarrow m(\angle MOP) = 180^\circ - m(\angle NOP) = 180^\circ - 130^\circ = 50^\circ$

Exercițiul 5. Fie unghiurile $\angle AOB$ și $\angle COD$ opuse la vârf. Semidreapta OM este bisectoarea unghiului $\angle AOB$, iar semidreapta ON este semidreapta opusă lui OM .

- (a) Demonstrați că semidreapta ON este bisectoarea unghiului $\angle COD$.
 (b) Dacă $m(\angle AOM) = 35^\circ$, calculați măsura unghiului $\angle NOC$.



a)

$\angle AOB, \angle COD$ - opuse la vârf $\Rightarrow m(\angle AOB) = m(\angle COD)$

OM - bisectoarea $\angle AOB \Rightarrow m(\angle AOM) = m(\angle MOB)$

Deoarece ON este semidreapta opusă lui OM , iar OC este opusă lui $OB \Rightarrow$
 $\left. \begin{array}{l} \angle CON \text{ și } \angle BOM - \text{opuse} \\ \angle DON \text{ și } \angle AOM - \text{opuse} \end{array} \right\}$

$\left. \begin{array}{l} \angle BOM \equiv \angle AOM \\ \angle BOM \equiv \angle CON \\ \angle DON \equiv \angle AOM \end{array} \right\} \Rightarrow \angle CON \equiv \angle DON \Rightarrow ON - \text{bisectoarea } \angle COD$

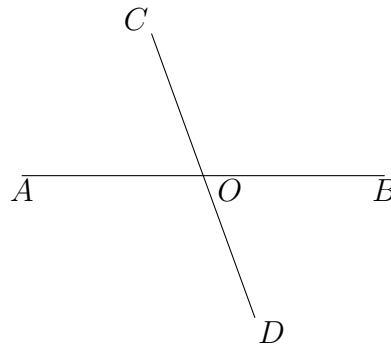
b)

$\left. \begin{array}{l} m(\angle AOM) = 35^\circ \\ m(\angle AOM) = m(\angle MOB) \end{array} \right\} \Rightarrow m(\angle MOB) = 35^\circ$

$\angle NOC$ și $\angle BOM$ - opuse la vârf $\Rightarrow m(\angle NOC) = m(\angle MOB) = 35^\circ$

Exercițiul 6. Punctele A, O, B sunt coliniare. De aceeași parte a dreptei AB se consideră semidreapta OC , iar de cealaltă parte semidreapta OD , astfel încât unghiurile $\angle AOC$ și $\angle BOD$ sunt congruente.

- (a) Arătați că punctele C, O, D sunt coliniare.
 (b) Dacă $m(\angle BOC) = 110^\circ$, calculați măsura unghiului $\angle AOD$.



a)

$$A-O-B \text{ coliniare} \Rightarrow m(\angle AOB) = 180^\circ$$

$$m(\angle COD) = m(\angle COB) + m(\angle BOD)$$

$\angle COB$ și $\angle AOC$ - unghiuri suplementare

$$m(\angle COB) + m(\angle AOC) = 180^\circ$$

$$m(\angle COB) = 180^\circ - m(\angle AOC)$$

$$m(\angle COD) = 180^\circ - m(\angle AOC) + m(\angle BOD)$$

$$m(\angle AOC) = m(\angle BOD)$$

$$m(\angle COD) = 180^\circ - \cancel{m(\angle AOC)} + \cancel{m(\angle AOC)}$$

$$m(\angle COD) = 180^\circ \Rightarrow C-O-D \text{ coliniare}$$

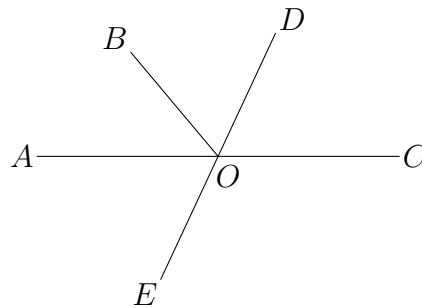
b)

$C-O-D$ coliniare $\Rightarrow \angle AOD$ și $\angle BOC$ opuse la vârf

$$m(\angle AOD) = m(\angle BOC) = 110^\circ$$

Exercițiul 7. Se consideră unghiurile adiacente suplementare $\angle AOB$ și $\angle BOC$. Fie OD bisectoarea unghiului $\angle BOC$ și OE semidreapta opusă semidreptei OD .

- (a) Dacă $m(\angle AOB) = 50^\circ$, calculați măsura unghiului $\angle AOE$.
 (b) Arătați că unghiurile $\angle AOE$ și $\angle DOE$ nu pot fi opuse la vârf.



a)

$$m(\angle AOB) + m(\angle BOC) = 180^\circ$$

$$m(\angle BOC) = 180^\circ - m(\angle AOB)$$

$$m(\angle BOC) = 180^\circ - 50^\circ$$

$$m(\angle BOC) = 130^\circ$$

$$(OD - \text{bisectoarea } \angle BOC \Rightarrow m(\angle COD) = m(\angle BOD) = \frac{m(\angle BOC)}{2} = 65^\circ$$

$$OE \text{ opusă lui } OD \Rightarrow D-O-E \text{ coliniare} \Rightarrow m(\angle AOE) = 180^\circ$$

$$m(\angle AOD) + m(\angle AOE) = 180^\circ$$

$$m(\angle AOE) = 180^\circ - m(\angle AOD) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Rightarrow m(\angle AOE) = 180^\circ - \underbrace{m(\angle AOB)}_{50^\circ} - \underbrace{m(\angle BOD)}_{65^\circ} \\ m(\angle AOD) = m(\angle AOB) + m(\angle BOD) \end{array} \right.$$

$$m(\angle AOE) = 180^\circ - 50^\circ - 65^\circ = 65^\circ$$

b)

Pentru ca 2 unghiuri să fie opuse la vârf, ambele trebuie să fie unghiuri proprii (măsura între 0° și 180°)

$$m(\angle AOE) = 65^\circ, \quad m(\angle DOE) = 180^\circ$$

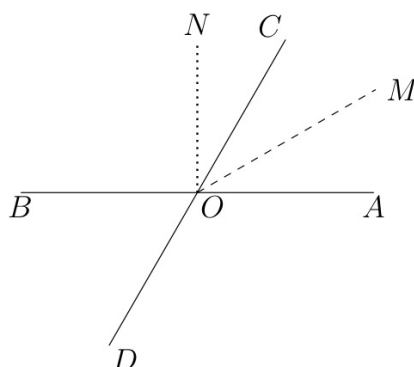
5

Laturile trebuie să fie perpendiculare opuse.

Latura OA a primului unghi nu are ca latură opusă nicio latură a celui de-al doilea. Deci, nu pot fi opuse la vârf.

Exercițiul 8. Fie dreptele concurente AB și CD care se intersectează în O . Fie OM bisectoarea unghiului $\angle AOC$. Știind că măsura unghiului $\angle MOD$ este 150° :

- (a) Calculați măsurile unghiurilor $\angle AOC$ și $\angle BOC$.
 (b) Dacă $ON \perp AB$ (N și C de aceeași parte a lui AB), calculați măsura unghiului $\angle CON$.



a)

$AB \cap CD = \{O\} \Rightarrow C-O-D$ coliniare $\Rightarrow \angle MOD, \angle MOC$ - adiacente
suplementare

$$m(\angle MOD) + m(\angle MOC) = 180^\circ \Rightarrow m(\angle MOC) = 180^\circ - \underbrace{m(\angle MOD)}_{150^\circ}$$

$$m(\angle MOC) = 30^\circ$$

OM - bisectoarea $\angle AOC \Rightarrow m(\angle AOC) = 2m(\angle MOC) = 2 \cdot 30^\circ = 60^\circ$

$AB \cap CD = \{O\} \Rightarrow A-O-B$ coliniare $\Rightarrow m(\angle AOC) + m(\angle BOC) = 180^\circ$

$$m(\angle BOC) = 180^\circ - m(\angle AOC) = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$$

b)

$$ON \perp AB \Rightarrow m(\angle NOA) = 90^\circ$$

$$m(\angle AOC) = 60^\circ < m(\angle NOA) = 90^\circ \Rightarrow OC \subset \text{Int}(\angle NOA)$$

$$m(\angle CON) = m(\angle NOA) - m(\angle AOC)$$

$$m(\angle CON) = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$$