



Fișă de lucru

## Lecția 4 – Ecuația de gradul al doilea cu o necunoscută

Clasa a 8-a – Capitolul 2 - Ecuații, inecuații și sisteme de ecuații

### Instrucțiuni

Rezolvă exercițiile identificând corect coeficienții și calculând discriminantul  $\Delta$  acolo unde este cazul.

Formule utile:  $\Delta = b^2 - 4ac$ ;  $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$ .

Durata recomandată: **40-50 minute**.

### Exerciții

**Exercițiul 1.** Scrie ecuația de gradul al doilea  $ax^2 + bx + c = 0$  pentru valorile date ale coeficienților:

- (a)  $a = 5, \quad b = -2, \quad c = 3$
- (b)  $a = -4, \quad b = 6, \quad c = -1$
- (c)  $a = 3, \quad b = 0, \quad c = -12$

**Exercițiul 2.** Verifică dacă  $x_0 = -2$  este soluție pentru fiecare ecuație:

- (a)  $x^2 - 3x + 2 = 0$
- (b)  $2x^2 + 5x + 6 = 0$
- (c)  $3x^2 - 8x - 10 = 0$
- (d)  $x^2 + 4x + 4 = 0$

**Exercițiul 3.** Pentru fiecare ecuație, calculează discriminantul  $\Delta$  și precizează numărul de soluții reale:

- (a)  $6x^2 - 5x + 2 = 0$
- (b)  $x^2 + 6x + 9 = 0$
- (c)  $9x^2 + 4 = 0$
- (d)  $x^2 - 10x + 8 = 0$

(e)  $-2x^2 + 7x - 6 = 0$

(f)  $4x^2 - 1 = 0$

**Exercițiul 4.** Rezolvă în  $\mathbb{R}$ :

(a)  $x^2 - 7x + 12 = 0$

(b)  $2x^2 + 3x - 2 = 0$

(c)  $5x^2 - 20 = 0$

(d)  $3x^2 - 12x + 12 = 0$

**Exercițiul 5.** Aduceți la forma  $ax^2 + bx + c = 0$  și rezolvați:

(a)  $(x - 4)(x + 1) = 3x$

(b)  $2(x - 3)^2 = 5x - 7$

(c)  $(x + 2)(x - 6) + 9 = 0$

**Exercițiul 6.** Determină  $m \in \mathbb{R}$  astfel încât ecuația să aibă o singură soluție reală:

(a)  $4x^2 - 8x + m = 0$

(b)  $x^2 + (m - 5)x + 4 = 0$

(c)  $9x^2 + mx + 1 = 0$

**Exercițiul 7.** Rezolvă următoarele ecuații folosind descompunerea în factori sau metode directe, fără a calcula neapărat discriminantul:

(a)  $3x^2 - 15x = 0$

(b)  $4x^2 - 49 = 0$

(c)  $2x^2 + 18 = 0$

(d)  $(x + 1)^2 - 16 = 0$

**Exercițiul 8.** Probleme aplicative (modelează prin ecuații de gradul al doilea și rezolvă):

(a) Suprafața unui dreptunghi este  $180 \text{ cm}^2$ . Lățimea este cu  $3 \text{ cm}$  mai mică decât lungimea. Determină dimensiunile.

(b) Suma unui număr și a pătratului său este  $156$ . Găsește numărul.

(c) Aria unui pătrat crește cu  $84 \text{ cm}^2$  când latura se mărește cu  $2 \text{ cm}$ . Află latura inițială.

**Succes!**

**Exercițiul 1.** Scrie ecuația de gradul al doilea  $ax^2 + bx + c = 0$  pentru valorile date ale coeficienților:

(a)  $a = 5, b = -2, c = 3$

(b)  $a = -4, b = 6, c = -1$

(c)  $a = 3, b = 0, c = -12$

a)  $5x^2 + (-2)x + 3 = 0 \Rightarrow 5x^2 - 2x + 3 = 0$

b)  $-4x^2 + 6x - 1 = 0$

c)  $3x^2 + 0 \cdot x + (-12) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 12 = 0$

**Exercițiul 2.** Verifică dacă  $x_0 = -2$  este soluție pentru fiecare ecuație:

(a)  $x^2 - 3x + 2 = 0$

(b)  $2x^2 + 5x + 6 = 0$

(c)  $3x^2 - 8x - 10 = 0$

(d)  $x^2 + 4x + 4 = 0$

Îl înlocuim pe  $x$  cu  $-2$  în fiecare ecuație:

a)  $x^2 - 3x + 2 = (-2)^2 - 3 \cdot (-2) + 2 = 4 + 6 + 2 = 12 \neq 0$  Nu este soluție

b)  $2x^2 + 5x + 6 = 2 \cdot (-2)^2 + 5 \cdot (-2) + 6 = 2 \cdot 4 - 10 + 6 = 8 - 10 + 6 = -2 + 6 = 4 \neq 0$  Nu este soluție

c)  $3x^2 - 8x - 10 = 3 \cdot (-2)^2 - 8 \cdot (-2) - 10 = 3 \cdot 4 + 16 - 10 = 12 + 16 - 10 = 28 - 10 = 18 \neq 0$  Nu este soluție

d)  $x^2 + 4x + 4 = (-2)^2 + 4 \cdot (-2) + 4 = 4 - 8 + 4 = -4 + 4 = 0$  Este soluție

**Exercițiul 3.** Pentru fiecare ecuație, calculează discriminantul  $\Delta$  și precizează numărul de soluții reale:

a)  $6x^2 - 5x + 2 = 0 \Rightarrow a = 6, b = -5, c = 2$

$\Delta = b^2 - 4ac \Rightarrow \Delta = (-5)^2 - 4 \cdot 6 \cdot 2 = 25 - 24 \cdot 2$

$\Rightarrow \Delta = 25 - 48 = -23 \Rightarrow \Delta < 0 \Rightarrow 0$  soluții reale

b)  $x^2 + 6x + 9 = 0 \Rightarrow a = 1, b = 6, c = 9$

$\Delta = b^2 - 4ac \Rightarrow \Delta = 6^2 - 4 \cdot 1 \cdot 9 = 36 - 36 = 0$

$\Delta = 0 \Rightarrow 1$  soluție reală

$$c) 9x^2 + 4 = 0 \Rightarrow a=9, b=0, c=4$$

$$\Delta = b^2 - 4ac \Rightarrow \Delta = 0^2 - 4 \cdot 9 \cdot 4 = 0 - 36 \cdot 4$$

$$\Rightarrow \Delta = -144 \Rightarrow \Delta < 0 \Rightarrow 0 \text{ solutii reale}$$

$$d) x^2 - 10x + 8 = 0 \Rightarrow a=1, b=-10, c=8$$

$$\Delta = b^2 - 4ac \Rightarrow \Delta = (-10)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 8 = 100 - 32 = 68$$

$$\Rightarrow \Delta > 0 \Rightarrow 2 \text{ solutii reale}$$

$$e) -2x^2 + 7x - 6 = 0 \Rightarrow a=-2, b=7, c=-6$$

$$\Delta = b^2 - 4ac \Rightarrow \Delta = 7^2 - 4 \cdot (-2) \cdot (-6) = 49 + 8 \cdot (-6) = 49 - 48 = 1$$

$$\Rightarrow \Delta > 0 \Rightarrow 2 \text{ solutii reale}$$

$$f) 4x^2 - 1 = 0 \Rightarrow a=4, b=0, c=-1$$

$$\Delta = b^2 - 4ac \Rightarrow \Delta = 0^2 - 4 \cdot 4 \cdot (-1) = 0 - 16 \cdot (-1) = 0 + 16 = 16$$

$$\Rightarrow \Delta > 0 \Rightarrow 2 \text{ solutii reale}$$

**Exercițiul 4.** Rezolvă în  $\mathbb{R}$ :

$$a) x^2 - 7x + 12 = 0 \Rightarrow a=1, b=-7, c=12$$

$$\Delta = b^2 - 4ac \Rightarrow \Delta = (-7)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 12 = 49 - 48 = 1$$

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{+7 - \sqrt{1}}{2 \cdot 1} = \frac{7-1}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{+7 + \sqrt{1}}{2 \cdot 1} = \frac{7+1}{2} = \frac{8}{2} = 4 \Rightarrow S = \{3, 4\}$$

$$b) 2x^2 + 3x - 2 = 0 \Rightarrow a=2, b=3, c=-2$$

$$\Delta = b^2 - 4ac \Rightarrow \Delta = 3^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-2) = 9 - 8 \cdot (-2) = 9 + 16 = 25$$

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-3 - \sqrt{25}}{2 \cdot 2} = \frac{-3-5}{4} = \frac{-8}{4} = -2$$

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-3 + \sqrt{25}}{2 \cdot 2} = \frac{-3+5}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \Rightarrow S = \left\{-2, \frac{1}{2}\right\}$$

$$c) 5x^2 - 20 = 0 \Rightarrow a = 5, b = 0, c = -20$$

$$\Delta = b^2 - 4ac \Rightarrow \Delta = 0^2 - 4 \cdot 5 \cdot (-20) = 0 - 20 \cdot (-20) = 400$$

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-0 - \sqrt{400}}{2 \cdot 5} = \frac{-20}{10} = -2$$

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-0 + \sqrt{400}}{2 \cdot 5} = \frac{+20}{10} = 2 \Rightarrow S = \{-2, 2\}$$

$$d) 3x^2 - 12x + 12 = 0 \quad /:3$$

$$\Rightarrow x^2 - 4x + 4 = 0 \Rightarrow a = 1, b = -4, c = 4$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 = 16 - 16 = 0 \Rightarrow 1 \text{ soluție dublă}$$

$$\Rightarrow x = -\frac{b}{2a} = -\frac{-4}{2 \cdot 1} = \frac{4}{2} = 2 \Rightarrow S = \{2\}$$

**Exercițiul 5.** Aduceți la forma  $ax^2 + bx + c = 0$  și rezolvați:

$$a) (x-4)(x+1) = 3x$$

$$\Rightarrow x \cdot x + x \cdot 1 - 4 \cdot x - 4 \cdot 1 = 3x \Rightarrow x^2 + x - 4x - 4 = 3x$$

$$x^2 - 3x - 4 = 3x \quad / -3x$$

$$x^2 - 6x - 4 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac \Rightarrow \Delta = (-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-4) = 36 + 16 = 52$$

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-6) - \sqrt{52}}{2 \cdot 1} = \frac{6 - 2\sqrt{13}}{2} \Rightarrow x_1 = 3 - \sqrt{13}$$

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-6) + \sqrt{52}}{2 \cdot 1} = \frac{6 + 2\sqrt{13}}{2} \Rightarrow x_2 = 3 + \sqrt{13}$$

$$b) 2(x-3)^2 = 5x - 7 \Rightarrow 2 \cdot (x^2 - 2 \cdot x \cdot 3 + 3^2) = 5x - 7$$

$$2(x^2 - 6x + 9) = 5x - 7$$

$$2x^2 - 2 \cdot 6x + 2 \cdot 9 = 5x - 7 \Rightarrow 2x^2 - 12x + 18 = 5x - 7 \quad / +7$$

$$2x^2 - 12x + 25 = 5x \quad / -5x$$

$$2x^2 - 17x + 25 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac \Rightarrow \Delta = (-17)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 25 \Rightarrow \Delta = 289 - 200 = 89$$

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2 \cdot a} \Rightarrow x_1 = \frac{+17 - \sqrt{89}}{2 \cdot 2} \Rightarrow x_1 = \frac{17 - \sqrt{89}}{4}$$

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2 \cdot a} \Rightarrow x_2 = \frac{+17 + \sqrt{89}}{2 \cdot 2} \Rightarrow x_2 = \frac{17 + \sqrt{89}}{4}$$

$$c) (x+2)(x-6) + 9 = 0$$

$$\Rightarrow x \cdot x - 6 \cdot x + 2 \cdot x - 2 \cdot 6 + 9 = 0$$

$$x^2 - 6x + 2x - 12 + 9 = 0$$

$$\Rightarrow x^2 - 4x - 3 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac \Rightarrow \Delta = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3) = 16 + 12 = 28$$

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{4 - \sqrt{28}}{2 \cdot 1} = \frac{4 - 2\sqrt{7}}{2} \Rightarrow x_1 = 2 - \sqrt{7}$$

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{4 + \sqrt{28}}{2 \cdot 1} = \frac{4 + 2\sqrt{7}}{2} \Rightarrow x_2 = 2 + \sqrt{7}$$

**Exercițiul 6.** Determină  $m \in \mathbb{R}$  astfel încât ecuația să aibă o singură soluție reală:

(a)  $4x^2 - 8x + m = 0$

(b)  $x^2 + (m - 5)x + 4 = 0$

(c)  $9x^2 + mx + 1 = 0$

Condiția ca ecuația să aibă o singură soluție este  $\Delta = 0$ .

a)  $a = 4, b = -8, c = m$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-8)^2 - 4 \cdot 4 \cdot m = 64 - 16m \quad \left. \begin{array}{l} \Delta = 0 \\ \Rightarrow 64 - 16m = 0 \quad | +16m \\ \Rightarrow 64 = 16m \quad | :16 \\ \Rightarrow m = 4 \end{array} \right\}$$

b)  $a = 1, b = m - 5, c = 4$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (m - 5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 = m^2 - 2 \cdot m \cdot 5 + 5^2 - 16$$

$$\Rightarrow \Delta = m^2 - 10m + 25 - 16$$

$$\Delta = m^2 - 10m + 9 \quad \left. \begin{array}{l} \Rightarrow m^2 - 10m + 9 = 0 \\ \Delta = b^2 - 4ac \end{array} \right\}$$

$$\Delta = 0$$

$$\Rightarrow \Delta = (-10)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 9 = 100 - 36 = 64$$

$$\Rightarrow m_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{10 - \sqrt{64}}{2 \cdot 1} = \frac{10 - 8}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

$$m_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{10 + \sqrt{64}}{2 \cdot 1} = \frac{10 + 8}{2} = \frac{18}{2} = 9 \quad \Rightarrow \underline{m \in \{1, 9\}}$$

$$c) a = 9, b = m, c = 1$$

$$\Delta = b^2 - 4ac \Rightarrow \Delta = m^2 - 4 \cdot 9 \cdot 1 = m^2 - 36 \quad \left. \begin{array}{l} \Delta = 0 \\ \Delta = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow m^2 - 36 = 0 \quad | +36$$

$$m^2 = 36 \Rightarrow m = \pm \sqrt{36}$$

$$\Rightarrow m = \pm 6$$

**Exercițiul 7.** Rezolvă următoarele ecuații folosind descompunerea în factori sau metode directe, fără a calcula neapărat discriminantul:

$$a) 3x^2 - 15x = 0 \Rightarrow 3x(x-5) = 0 \quad | :3$$

$$x(x-5) = 0 \Rightarrow x = 0 \quad \text{sau} \quad x-5 = 0 \quad | +5$$

$$x = 5 \Rightarrow x \in \{0, 5\}$$

$$b) 4x^2 - 49 = 0$$

$$2^2 \cdot x^2 - 7^2 = 0 \Rightarrow (2x)^2 - 7^2 = 0$$

$$\text{Aplicăm formula: } a^2 - b^2 = (a-b)(a+b) \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (2x-7)(2x+7) = 0 \Rightarrow 2x-7 = 0 \quad \text{sau} \quad 2x+7 = 0 \quad | -7$$

$$2x = 7 \quad | :2$$

$$x = \frac{7}{2}$$

$$2x = -7 \quad | :2$$

$$x = -\frac{7}{2} \Rightarrow x \in \left\{ \pm \frac{7}{2} \right\}$$

$$c) 2x^2 + 18 = 0 \quad | -18$$

$$2x^2 = -18 \quad | :2$$

$$x^2 = -9$$

Un pătrat nu poate fi negativ  $\left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} \Rightarrow x \in \emptyset$

$$d) (x+1)^2 - 16 = 0 \quad | +16$$

$$(x+1)^2 = 16 \Rightarrow x+1 = \pm \sqrt{16}$$

$$\text{Caz 1: } x+1 = \sqrt{16} \Rightarrow x+1 = 4 \quad | -1$$

$$x = 3$$

$$\text{Caz 2: } x+1 = -\sqrt{16} \Rightarrow x+1 = -4 \quad | -1$$

$$x = -5$$

$$\Rightarrow x \in \{-5, 3\}$$

**Exercițiul 8.** Probleme aplicative (modelează prin ecuații de gradul al doilea și rezolvă):

- Suprafața unui dreptunghi este  $180 \text{ cm}^2$ . Lățimea este cu 3 cm mai mică decât lungimea. Determină dimensiunile.
- Suma unui număr și a pătratului său este 156. Găsește numărul.
- Aria unui pătrat crește cu  $84 \text{ cm}^2$  când latura se mărește cu 2 cm. Află latura inițială.

a) Notez lungimea cu  $L$  și lățimea cu  $l$ .

$$l = L - 3$$

$$\text{Aria: } L \cdot l = 180 \Rightarrow L \cdot (L - 3) = 180 \Rightarrow L^2 - 3 \cdot L = 180 \quad | -180$$

$$L^2 - 3L - 180 = 0 \Rightarrow a = 1, b = -3, c = -180$$

$$\Delta = b^2 - 4ac \Rightarrow \Delta = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-180) = 9 + 720 = 729$$

$$L_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{3 - \sqrt{729}}{2 \cdot 1} = \frac{3 - 27}{2} = \frac{-24}{2} = -12 < 0 \text{ imposibil}$$

$$L_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{3 + \sqrt{729}}{2 \cdot 1} = \frac{3 + 27}{2} = \frac{30}{2} = 15$$

$$l = L - 3 \Rightarrow l = 15 - 3 \Rightarrow l = 12$$

$$L = 15 \text{ cm și } l = 12 \text{ cm}$$

b) Notez numărul cu  $m$ .

$$m + m^2 = 156 \quad | -156 \Rightarrow m^2 + m - 156 = 0 \Rightarrow a = 1, b = 1, c = -156$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-156) = 1 + 624 = 625$$

$$m_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1 - \sqrt{625}}{2 \cdot 1} = \frac{-1 - 25}{2} = \frac{-26}{2} = -13$$

$$m_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1 + \sqrt{625}}{2 \cdot 1} = \frac{-1 + 25}{2} = \frac{24}{2} = 12 \Rightarrow m \in \{-13, 12\}$$

c) Notez latura pătratului cu  $l$ .

$$\text{Aria inițială: } l^2$$

$$\text{Latura nouă: } l + 2$$

$$\text{Aria nouă: } (l + 2)^2 \Rightarrow (l + 2)^2 = l^2 + 84 \Rightarrow \cancel{l^2} + 2 \cdot 2 \cdot l + 2^2 = \cancel{l^2} + 84$$

$$\Rightarrow 4l + 4 = 84 \quad | -4$$

$$4l = 80 \quad | :4$$

$$\Rightarrow l = 20 \text{ cm}$$