

Lecția 4 - Poligoane regulate

Clasa a 7-a – Capitolul Geometrie

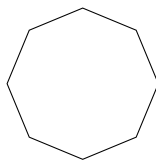
Instrucțiuni

Rezolvă exercițiile folosind proprietățile poligoanelor regulate (laturi și unghiuri congruente), formula sumei măsurilor unghiurilor și relația cu cercul circumscris. Durata recomandată: **50 de minute**.

Exerciții

Exercițiul 1. Se consideră un poligon regulat cu 8 laturi (octogon regulat) având latura de lungime $l = 5$ cm.

- Calculează suma măsurilor unghiurilor acestui poligon.
- Determină perimetrul octogonului.



a)

Suma măsurilor unghiurilor unui poligon convex cu n laturi este dată de formula:

$$\begin{aligned} S &= (n-2) \cdot 180^\circ \\ n &= 8 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} S &= (8-2) \cdot 180^\circ \\ S &= 6 \cdot 180^\circ \\ S &= 1080^\circ \end{aligned}$$

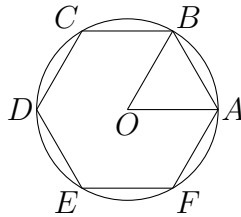
b)

Perimetrul unui poligon regulat este produsul dintre numărul de laturi și lungimea laturii

$$\begin{aligned} P &= n \cdot l \\ P &= 8 \cdot 5 \\ P &= 40 \text{ cm} \end{aligned}$$

Exercițiul 2. Un hexagon regulat $ABCDEF$ este înscris într-un cerc de centru O și rază $R = 6$ cm.

- Precizează natura triunghiului AOB .
- Calculează perimetrul hexagonului $ABCDEF$.



a) Într-un hexagon regulat, unghiul la centru corespunzător unei laturi este:

$$m(\angle AOB) = \frac{360^\circ}{n} = \frac{360^\circ}{6} = 60^\circ \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} \Rightarrow \Delta OAB - \text{echilateral}$$

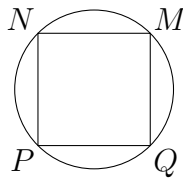
$$A, B \in \mathcal{C}(O, R), OA = OB = R \Rightarrow \Delta OAB - \text{isoscel}$$

b) $\Delta OAB - \text{echilateral} \Rightarrow AB = OA = OB = R = 6 \text{ cm}$

$$P_{ABCDEF} = 6AB = 6 \cdot 6 = 36 \text{ cm}$$

Exercițiul 3. Pătratul $MNPQ$ este înscris într-un cerc $\mathcal{C}(O, R)$.

- Determină măsura arcului mic $\widehat{MN}$.
- Dacă perimetrul pătratului este 24 cm, află lungimea laturii MN .



a)

Vârfulurile unui poligon regulat cu n laturi împart cercul în n arce congruente. Pentru pătrat ($n=4$):

$$m(\widehat{MN}) = \frac{360^\circ}{4} = 90^\circ$$

2

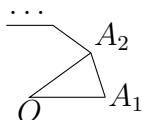
b)

$$P = 4MN \Rightarrow MN = \frac{P}{4} = \frac{24}{4}$$

$$MN = 6 \text{ cm}$$

Exercițiul 4. Se consideră un poligon regulat cu n laturi.

- (a) Dacă măsura unui unghi al poligonului este de 144° , determină numărul de laturi n .
- (b) Pentru poligonul găsit, calculează măsura unghiului la centru corespunzător unei laturi.



a)

Formula unghiului unui poligon regulat:

$$u = \frac{(n-2) \cdot 180}{n}$$

$$u \cdot n = (n-2) \cdot 180$$

$$u \cdot n = 180n - 360 \Rightarrow 360 = 180n - un$$

$$360 = n(180 - u)$$

$$\left. \begin{array}{l} n = \frac{360}{180 - u} \\ u = 144^\circ \end{array} \right\} \Rightarrow n = \frac{360}{180 - 144} = \frac{360}{36}$$

$$n = 10 \text{ laturi}$$

Poligonul are 10 laturi și se numește DECAON.

b)

Măsura unghiului la centru:

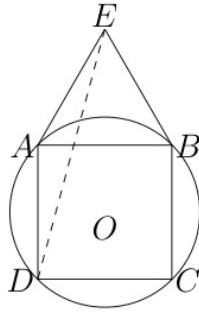
$$L = \frac{360^\circ}{n}$$

$$n = 10$$

$$L = \frac{360}{10} \Rightarrow L = 36^\circ$$

Exercițiul 5. Pătratul $ABCD$ este înscris în cercul $\mathcal{C}(O, R)$. Pe latura AB se construiește în exteriorul pătratului triunghiul echilateral ABE .

- (a) Demonstrează că triunghiul ADE este isoscel.
 (b) Calculează măsura unghiului $\angle AED$.



a)

$$ABCD - \text{pătrat} \Rightarrow AB = BC = CD = DA = l$$

$$m(\angle DAB) = m(\angle ABC) = m(\angle BCD) = m(\angle CDA) = 90^\circ$$

$$\triangle ABE - \text{echilateral construit pe latura } AB \Rightarrow AB = AE = BE$$

$$\begin{matrix} AB = l \\ AB = AE = BE \end{matrix} \Rightarrow AB = AE = BE = l$$

$$\begin{matrix} AD = l \\ AE = l \end{matrix} \Rightarrow AD = AE \Rightarrow \triangle ADE - \text{isoscel}$$

b)

$$\triangle ABE - \text{echilateral} \Rightarrow m(\angle EAB) = 60^\circ$$

$$\triangle ADE - \text{isoscel} \Rightarrow m(\angle ADE) = m(\angle AED)$$

$$m(\angle ADE) + m(\angle AED) + m(\angle EAD) = 180^\circ$$

$$2m(\angle AED) + m(\angle EAD) = 180^\circ$$

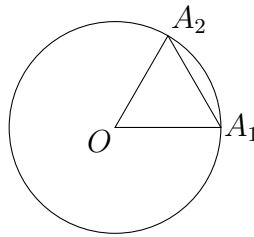
$$m(\angle AED) = \frac{180^\circ - m(\angle EAD)}{2}$$

$$m(\angle EAD) = m(\angle EAB) + m(\angle BAD) = 60^\circ + 90^\circ = 150^\circ$$

$$m(\angle AED) = \frac{180^\circ - 150^\circ}{2} = \frac{30^\circ}{2} = 15^\circ$$

Exercițiul 6. Un punct O este centrul unui cerc circumscris unui poligon regulat $A_1A_2\dots A_n$.
Se știe că triunghiul OA_1A_2 este echilateral.

- (a) Determină măsura unghiului la centru $\angle A_1OA_2$.
- (b) Stabilește numărul de laturi ale poligonului și denumirea acestuia.



a)

Deoarece triunghiul format de centru și două vârfuri consecutive (OA_1A_2) este echilateral, toate unghiurile sale sunt de 60° .

Unghiul la centru este $\angle A_1OA_2$

$$m(\angle A_1OA_2) = 60^\circ$$

b)

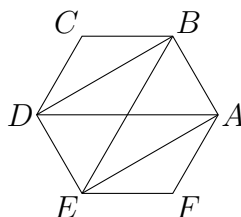
Știind unghiul la centru, aflăm numărul de laturi:

$$u = \frac{360^\circ}{n} \Rightarrow n = \frac{360^\circ}{u} = \frac{360^\circ}{60^\circ} = 6 \text{ laturi}$$

Poligonul este un hexagon regulat.

Exercițiul 7. Se consideră hexagonul regulat $ABCDEF$ cu latura de 8 cm.

- (a) Demonstrează că patrulaterul $ABDE$ este un dreptunghi.
 (b) Arată că diagonala AD este diametru în cercul circumscris și calculează lungimea ei.



a)

În hexagonul regulat, laturile opuse sunt paralele și congruente

$ABCDEF$ - hexagon regulat $\Rightarrow \begin{cases} AB \parallel DE \\ AB = DE \end{cases} \Rightarrow ABDE$ - paralelogram

Unghiul unui hexagon regulat este 120° .

$ABCDEF$ - hexagon regulat $\Rightarrow AB = BC = CD = DE = EF = FA$

$BC = CD \Rightarrow \triangle BCD$ - isoscel cu unghiul de la vârf $120^\circ \Rightarrow$

$\Rightarrow m(\angle CAB) = m(\angle CBD)$

$m(\angle CAB) + m(\angle CBD) + m(\angle ACB) = 180^\circ$

$2m(\angle CBD) + 120^\circ = 180^\circ \quad | -120^\circ \Rightarrow 2m(\angle CBD) = 60^\circ \quad | :2$
 $m(\angle CBD) = 30^\circ$

$m(\angle ABD) = m(\angle ABC) - m(\angle CBD) = 120^\circ - 30^\circ = 90^\circ$

Paralelogramul cu un unghi drept este dreptunghi.

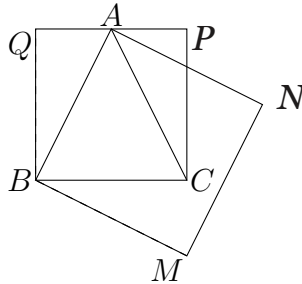
$ABDE$ - paralelogram $\Rightarrow ABDE$ - dreptunghi
 $m(\angle ABD) = 90^\circ$

6

b) $m(\angle ABD) = 90^\circ \Rightarrow \triangle ABD$ - dreptunghic înscris în cerc
 AD subîntinde un unghi de $90^\circ \Rightarrow AD$ - diametru (Teorema $\angle$ -ului înscris)
 $r = l \Rightarrow AD = 2r = 2l = 2 \cdot 8 = 16 \text{ cm}$

Exercițiul 8. În exteriorul unui triunghi echilateral ABC de latură 6 cm se construiesc pătratele $ABMN$ și $BCPQ$.

- (a) Demonstrează că triunghiul MBQ este isoscel.
 (b) Calculează măsura unghiului $\angle MBQ$.



a) $\triangle ABC$ - echilateral $\Rightarrow AB = BC = CA = 6 \text{ cm}$

$ABMN$ - pătrat $\Rightarrow AB = BM = MN = NA$

$BCPQ$ - pătrat $\Rightarrow BC = CP = PQ = QB$

$$\left. \begin{array}{l} AB = BC \\ AB = BM \\ BC = BQ \end{array} \right\} \Rightarrow BM = BQ = 6 \text{ cm} \Rightarrow \triangle MBQ - \text{isoscel}$$

b)

Calculăm unghiul în jurul punctului B
 Suma unghiurilor este 360° .

$ABMN$ - pătrat $\Rightarrow m(\angle MBA) = m(\angle BAN) = m(\angle ANM) = m(\angle NMB) = 90^\circ$

$\triangle ABC$ - echilateral $\Rightarrow m(\angle ABC) = m(\angle BAC) = m(\angle ACB) = 60^\circ$

$BCPQ$ - pătrat $\Rightarrow m(\angle QBC) = m(\angle BQP) = m(\angle QPC) = m(\angle PCB) = 90^\circ$

$m(\angle MBQ) = 360^\circ - [m(\angle ABM) + m(\angle ABC) + m(\angle CBQ)]$

$m(\angle MBQ) = 360^\circ - 90^\circ - 60^\circ - 90^\circ = 360^\circ - 240^\circ = 120^\circ$