

Lecția 4 - Exerciții recapitulative

Clasa a 7-a – Capitolul Geometrie

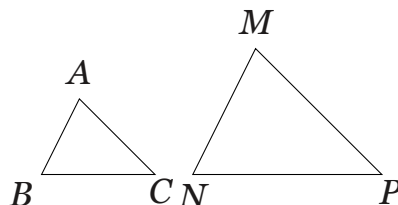
Instrucțiuni

Rezolvă exercițiile folosind toate cunoștințele acumulate despre asemănarea triunghiurilor: Teorema lui Thales, Teorema Fundamentală a Asemănării, Criteriile de asemănare (L.U.L, U.U, L.L.L) și raportul ariilor. Durata recomandată: **50 de minute**.

Exerciții

Exercițiul 1. Triunghiul ABC este asemenea cu triunghiul MNP . Raportul de asemănare este $k = \frac{AB}{MN} = \frac{3}{5}$.

- Dacă perimetrul triunghiului ABC este 24 cm, calculează perimetrul triunghiului MNP .
- Dacă aria triunghiului MNP este 100 cm^2 , calculează aria triunghiului ABC .



$$a) \quad \Delta ABC \sim \Delta MNP \Rightarrow \frac{P_{\Delta ABC}}{P_{\Delta MNP}} = k \Rightarrow P_{\Delta MNP} = \frac{P_{\Delta ABC}}{k}$$

$$k = \frac{AB}{MN} = \frac{3}{5}$$

$$P_{\Delta MNP} = \frac{24}{\frac{3}{5}} = \frac{24 \cdot 5}{3} = 8 \cdot 5 = 40 \text{ cm}$$

$$b) \quad \Delta ABC \sim \Delta MNP \Rightarrow \frac{A_{\Delta ABC}}{A_{\Delta MNP}} = k^2 = \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{9}{25}$$

1

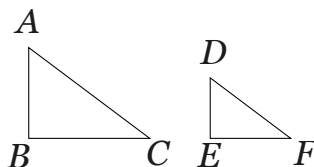
$$A_{\Delta ABC} = k^2 \cdot A_{\Delta MNP}$$

$$A_{\Delta ABC} = \frac{9}{25} \cdot 100 = 9 \cdot 4 = 36 \text{ cm}^2$$

Exercițiul 2. Se dau două triunghiuri cu lungimile laturilor:

- $\triangle ABC$: $AB = 9$ cm, $BC = 12$ cm, $AC = 15$ cm.
- $\triangle DEF$: $DE = 6$ cm, $EF = 8$ cm, $DF = 10$ cm.

Verifică dacă cele două triunghiuri sunt asemenea și, în caz afirmativ, precizează raportul de asemănare $\frac{P_{\triangle ABC}}{P_{\triangle DEF}}$.



$$\frac{DE}{AB} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}, \quad \frac{EF}{BC} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}, \quad \frac{DF}{AC} = \frac{10}{15} = \frac{2}{3}$$

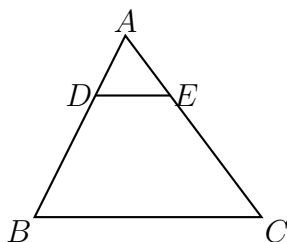
$$\frac{DE}{AB} = \frac{EF}{BC} = \frac{DF}{AC} = k = \frac{2}{3} \xRightarrow{\text{L.L.L.}} \triangle DEF \sim \triangle ABC$$

$$\triangle DEF \sim \triangle ABC \Rightarrow \frac{P_{\triangle DEF}}{P_{\triangle ABC}} = k \Rightarrow \frac{P_{\triangle ABC}}{P_{\triangle DEF}} = \frac{1}{k} = \frac{1}{\frac{2}{3}} = \frac{3}{2}$$

Exercițiul 3. În triunghiul ABC cu $AB = 18$ cm, se consideră punctul $D \in AB$ astfel încât $AD = 6$ cm. Prin D se duce o paralelă la BC care intersectează AC în E .

(a) Determină raportul $\frac{AE}{AC}$.

(b) Dacă $BC = 24$ cm, calculează lungimea segmentului DE .



$$a) \quad DE \parallel BC \xRightarrow{\text{Teorema lui Thales}} \frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC} \Rightarrow \frac{AD}{AD+DB} = \frac{AE}{AE+EC}$$

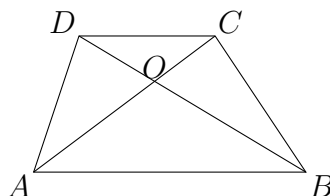
$$\left. \begin{array}{l} \frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} \\ \frac{AD}{AB} = \frac{6}{18} = \frac{1}{3} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{AE}{AC} = \frac{1}{3}$$

$$b) \quad DE \parallel BC \xRightarrow{\text{T.F.A.}} \triangle ADE \sim \triangle ABC \Rightarrow \frac{AD}{AB} = \frac{DE}{BC} = \frac{AE}{AC} = \frac{1}{3}$$

$$\frac{DE}{BC} = \frac{1}{3} \Rightarrow DE = \frac{BC}{3} \quad \left. \begin{array}{l} BC = 24 \text{ cm} \\ \end{array} \right\} \Rightarrow DE = \frac{24}{3} = 8 \text{ cm}$$

Exercițiul 4. Fie trapezul $ABCD$ cu bazele $AB \parallel CD$ și $AB = 2 \cdot CD$. Diagonalele se intersectează în punctul O . Aria triunghiului COD este egală cu 12 cm^2 .

- (a) Calculează raportul de asemănare al triunghiurilor $\triangle AOB$ și $\triangle COD$.
 (b) Determină aria triunghiului AOB .



a)

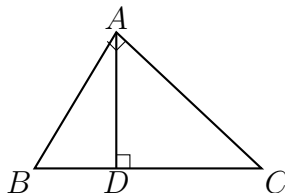
$$\begin{aligned} AB \parallel CD &\Rightarrow \text{T.F.A.} \Rightarrow \triangle AOB \sim \triangle COD \Rightarrow \frac{AO}{CO} = \frac{OB}{OD} = \frac{AB}{CD} = k \\ \frac{AB}{CD} = k &\Rightarrow \frac{2CD}{CD} = k \\ AB = 2CD &\Rightarrow k = 2 \end{aligned}$$

b) $\triangle AOB \sim \triangle COD \Rightarrow \frac{A_{\triangle AOB}}{A_{\triangle COD}} = k^2 = 2^2 = 4$

$$A_{\triangle AOB} = 4 A_{\triangle COD} = 4 \cdot 12 = 48 \text{ cm}^2$$

Exercițiul 5. Se consideră triunghiul dreptunghic ABC ($\angle A = 90^\circ$) și înălțimea $AD \perp BC$ ($D \in BC$).

- (a) Scrie perechile de triunghiuri asemenea care se formează.
 (b) Dacă raportul catetelor este $\frac{AB}{AC} = \frac{3}{4}$, determină raportul ariilor $\frac{A_{ABD}}{A_{ADC}}$.



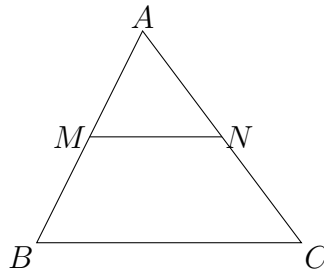
a) $\triangle DBA \sim \triangle ABC$, $\triangle DAC \sim \triangle ABC$, $\triangle DBA \sim \triangle DAC$

b) $\triangle DBA \sim \triangle DAC \Rightarrow \frac{DB}{DA} = \frac{BA}{AC} = \frac{DA}{DC} = k$

$$\begin{aligned} \frac{A_{\triangle DBA}}{A_{\triangle DAC}} = k^2 &\Rightarrow \frac{A_{\triangle DBA}}{A_{\triangle DAC}} = \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{9}{16} \\ \frac{AB}{AC} = k = \frac{3}{4} &\Rightarrow \end{aligned}$$

Exercițiul 6. Fie M mijlocul laturii AB a triunghiului ABC și N un punct pe latura AC astfel încât $\frac{AN}{AC} = \frac{1}{2}$.

- (a) Arată că MN este linie mijlocie.
 (b) Calculează raportul dintre aria trapezului $BMNC$ și aria triunghiului ABC .



a) M - mijlocul lui $AB \Rightarrow AM = MB = \frac{AB}{2}$

$$\frac{AN}{AC} = \frac{1}{2} \Rightarrow AC = 2AN \Rightarrow AN = \frac{AC}{2}$$

$$AC = AN + NC \Rightarrow NC = AC - AN$$

$$NC = \cancel{2}AC - \frac{AC}{2}$$

$$NC = \frac{AC}{2}$$

$$AN = NC = \frac{AC}{2} \Rightarrow N - \text{mijlocul lui } AC$$

M - mijlocul lui AB } $\Rightarrow MN$ - linie mijlocie
 N - mijlocul lui AC }

b)

MN - linie mijlocie în $\triangle ABC \Rightarrow MN \parallel BC$

$$MN \parallel BC \xRightarrow{\text{T.F.A.}} \triangle AMN \sim \triangle ABC \Rightarrow \frac{AM}{AB} = \frac{MN}{BC} = \frac{AN}{AC} = k \Rightarrow k = \frac{1}{2}$$

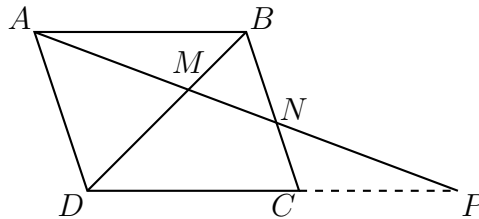
$$\frac{AN}{AC} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{A_{\triangle AMN}}{A_{\triangle ABC}} = k^2 \Rightarrow \frac{A_{\triangle AMN}}{A_{\triangle ABC}} = \frac{1}{4} \Rightarrow A_{\triangle AMN} = \frac{A_{\triangle ABC}}{4}$$

$$A_{BMNC} = A_{\triangle ABC} - A_{\triangle AMN} = \cancel{A_{\triangle ABC}}^4 - \frac{A_{\triangle ABC}}{4} = \frac{3}{4} A_{\triangle ABC}$$

$$\frac{A_{BMNC}}{A_{\triangle ABC}} = \frac{\frac{3}{4} A_{\triangle ABC}}{\cancel{A_{\triangle ABC}}} = \frac{3}{4}$$

Exercițiul 7. Se consideră paralelogramul $ABCD$. O dreaptă care trece prin vârful A intersectează diagonala BD în M , latura BC în N și prelungirea laturii DC în P . Demonstrează relația: $AM^2 = MN \cdot MP$.



$$ABCD - \text{paralelogram} \Rightarrow \begin{aligned} AB &\parallel DC, & AB &= DC \\ AD &\parallel BC, & AD &= BC \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} AD &\parallel BC \\ N &\in BC \end{aligned} \Rightarrow AD \parallel BN$$

$$AD \parallel BN \xRightarrow{\text{T.F.A.}} \triangle AMD \sim \triangle NMB \Rightarrow \frac{AM}{NM} = \frac{MD}{MB} = \frac{AD}{NB}$$

$$\begin{aligned} AB &\parallel DC \\ P &\in DC \end{aligned} \Rightarrow AB \parallel DP$$

$$AB \parallel DP \xRightarrow{\text{T.F.A.}} \triangle AMB \sim \triangle PMA \Rightarrow \frac{AM}{PM} = \frac{MB}{MD} = \frac{AB}{PD}$$

$$\frac{AM}{NM} = \frac{MD}{MB}$$

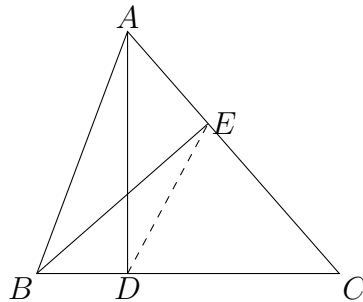
$$\begin{aligned} \frac{AM}{PM} = \frac{MB}{MD} &\Rightarrow \frac{MD}{MB} = \frac{PM}{AM} \\ \frac{MD}{MB} = \frac{AM}{NM} &\Rightarrow \frac{PM}{AM} = \frac{AM}{NM} \end{aligned}$$

$$\frac{PM}{AM} = \frac{AM}{NM} \Rightarrow AM \cdot AM = PM \cdot NM$$

$$AM^2 = MN \cdot MP$$

Exercițiul 8. În triunghiul ABC , AD și BE sunt înălțimi ($D \in BC, E \in AC$).

- (a) Demonstrează că $\triangle ADC \sim \triangle BEC$.
 (b) Arată că triunghiul DEC este asemenea cu triunghiul ABC și că raportul lor de asemănare este $k = \cos C$ (sau exprimat ca raport de catetă pe ipotenuză în triunghiul dreptunghic).



a)

$$AD \perp BC, D \in BC \Rightarrow m(\angle ADB) = m(\angle ADC) = 90^\circ$$

$$BE \perp AC, E \in AC \Rightarrow m(\angle BEA) = m(\angle BEC) = 90^\circ$$

comparam $\triangle ADC$ și $\triangle BEC$

$$\left. \begin{array}{l} \angle ADC \equiv \angle BEC \text{ (unghiuri drepte)} \\ \angle C \text{ este unghi comun} \end{array} \right\} \xRightarrow{\text{u.u.}} \triangle ADC \sim \triangle BEC$$

b)

$$\triangle ADC \sim \triangle BEC \Rightarrow \frac{AD}{BE} = \frac{DC}{EC} = \frac{AC}{BC}$$

$$\frac{DC}{EC} = \frac{AC}{BC} \Rightarrow DC \cdot BC = EC \cdot AC$$

$$\frac{DC}{AC} = \frac{EC}{BC}$$

comparam $\triangle DEC$ și $\triangle ABC$

$$\left. \begin{array}{l} \angle C - \text{unghi comun} \end{array} \right\} \xRightarrow{\text{L.U.L.}} \triangle DEC \sim \triangle ABC \Rightarrow \frac{DC}{AC} = k = \cos C$$

În $\triangle ABC$: AC - ipotenuză
 DC - catetă