

Lecția 3 - Tangente dintr-un punct exterior

Clasa a 7-a – Capitolul Geometrie

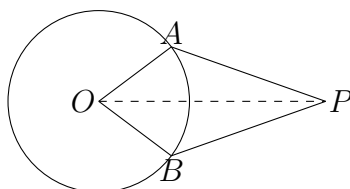
Instrucțiuni

Rezolvă exercițiile folosind proprietatea tangențelor duse dintr-un punct exterior (segmente congruente, bisectoarea unghiului) și relația dintre raza în punctul de contact și tangentă. Durata recomandată: **50 de minute**.

Exerciții

Exercițiul 1. Fie P un punct exterior cercului $\mathcal{C}(O, r)$. Se construiesc tangentele PA și PB la cerc (A, B puncte de tangență). Știind că $PA = 12$ cm și raza $OA = 5$ cm:

- Determină lungimea segmentului PB .
- Calculează perimetrul patrulaterului $PAOB$.



a)

conform Teoremei tangențelor duse dintr-un punct exterior, segmentele determinate de punctul exterior și punctele de contact sunt congruente.

$$PA, PB - \text{tangente} \Rightarrow \begin{matrix} PA = PB \\ PA = 12 \text{ cm} \end{matrix} \Rightarrow PB = 12 \text{ cm}$$

b)

$$P_{PAOB} = PA + AO + OB + BP$$

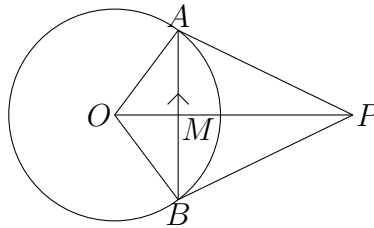
$$OA = OB = r = 5 \text{ cm}$$

$$P_{PAOB} = 12 + 5 + 5 + 12$$

$$P_{PAOB} = 34 \text{ cm}$$

Exercițiul 2. Din punctul P exterior cercului $\mathcal{C}(O, r)$ se duc tangentele PA și PB ($A, B \in \mathcal{C}$). Fie M punctul de intersecție dintre segmentul PO și coarda AB .

- (a) Demonstrează că dreapta PO este mediatoarea segmentului AB (adică $PO \perp AB$ și M este mijlocul lui AB).
- (b) Dacă $PA = 8$ cm și $m(\angle APB) = 60^\circ$, determină lungimea coardei AB și perimetrul triunghiului PAB .



a) PA, PB - tangente $\Rightarrow$ *Teorema tangentelor* $PA = PB \Rightarrow P$ se află pe mediatoarea segmentului AB

$OA = OB = r \Rightarrow O$ se află pe mediatoarea segmentului AB
 $\{M\} = PO \cap AB$

Deoarece două puncte (P și O) determină o dreaptă unică, dreapta PO este mediatoarea segmentului $AB \Rightarrow PO \perp AB$, M - mijlocul lui AB

b)

În $\triangle PAB$:
 $PA = PB \Rightarrow \triangle PAB$ - isoscel

$\triangle PAB$ - isoscel
 $m(\angle APB) = 60^\circ \Rightarrow \triangle PAB$ - echilateral

$\triangle PAB$ - echilateral $\Rightarrow PA = AB = BP \Rightarrow AB = BP = 8$ cm
 $PA = 8$ cm

$$AB = 8 \text{ cm}$$

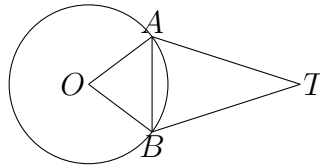
$$P_{\triangle PAB} = PA + AB + BP \quad 2$$

$$P_{\triangle PAB} = 3AB$$

$$P_{\triangle PAB} = 3 \cdot 8$$

$$P_{\triangle PAB} = 24 \text{ cm}$$

Exercițiul 3. Din punctul T exterior cercului se duc tangentele TA și TB . Dacă unghiul dintre tangente este $\angle ATB = 80^\circ$, calculează măsurile unghiurilor triunghiului TAB și măsura unghiului la centru $\angle AOB$.



TA, TB - tangente $\xRightarrow{\text{Teorema tangentelor}}$ $TA = TB$

În $\triangle TAB$:
 $TA = TB \quad \Bigg\} \Rightarrow \triangle TAB - \text{isoscel} \Rightarrow m(\angle TAB) = m(\angle TBA)$

$$m(\angle TAB) + m(\angle TBA) + m(\angle BTA) = 180^\circ$$

$$m(\angle TAB) = m(\angle TBA)$$

$$2m(\angle TAB) + \underbrace{m(\angle BTA)}_{80^\circ} = 180^\circ$$

$$2m(\angle TAB) + 80^\circ = 180^\circ \quad | -80^\circ$$

$$2m(\angle TAB) = 100^\circ \quad | :2 \Rightarrow m(\angle TAB) = 50^\circ \Rightarrow m(\angle TBA) = 50^\circ$$

Obs.: Tangenta la un cerc este perpendiculară pe rază în punctul de tangență.

În patrulaterul $TAOB$, razele sunt perpendiculare pe tangente:

$$OA \perp TA \Rightarrow m(\angle A) = 90^\circ$$

$$OB \perp TB \Rightarrow m(\angle B) = 90^\circ$$

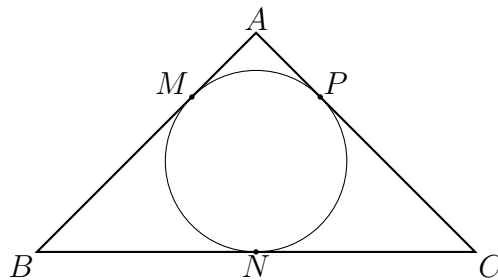
Suma măsurilor unghiurilor într-un patrulater este 360° .

$$\underbrace{m(\angle OAT)}_{90^\circ} + \underbrace{m(\angle ATB)}_{80^\circ} + \underbrace{m(\angle TBO)}_{90^\circ} + m(\angle BOA) = 360^\circ$$

$$m(\angle AOB) = 360^\circ - 90^\circ - 80^\circ - 90^\circ = 100^\circ$$

Exercițiul 4. Un cerc este înscris în triunghiul ABC . Punctele de tangență cu laturile AB, BC, AC sunt M, N , respectiv P . Știind că $AM = 4$ cm, $BN = 6$ cm și $CP = 5$ cm:

- Calculează lungimile laturilor AB, BC și AC .
- Determină perimetrul triunghiului ABC .



a)

conform teoremei tangentelor, segmentele de tangență duse dintr-un vârf la cerc sunt congruente.

$$AM, AP - \text{tangente} \Rightarrow AM = AP = 4 \text{ cm}$$

$$BN, BM - \text{tangente} \Rightarrow BN = BM = 6 \text{ cm}$$

$$CN, CP - \text{tangente} \Rightarrow CN = CP = 5 \text{ cm}$$

$$\begin{array}{l} MEAB \Rightarrow MA + MB = AB \\ AM = 4 \text{ cm} \\ MB = 6 \text{ cm} \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l} MEAB \\ AM = 4 \text{ cm} \\ MB = 6 \text{ cm} \end{array}} \right\} \Rightarrow AB = 4 + 6 = 10 \text{ cm}$$

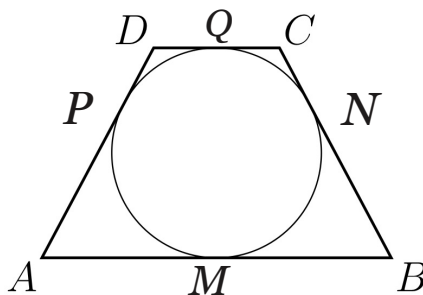
$$\begin{array}{l} PEAC \Rightarrow PA + PC = AC \\ AP = 4 \text{ cm} \\ CP = 5 \text{ cm} \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l} PEAC \\ AP = 4 \text{ cm} \\ CP = 5 \text{ cm} \end{array}} \right\} \Rightarrow AC = 4 + 5 = 9 \text{ cm}$$

$$\begin{array}{l} NEBC \Rightarrow NB + NC = BC \\ NB = 6 \text{ cm} \\ NC = 5 \text{ cm} \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l} NEBC \\ NB = 6 \text{ cm} \\ NC = 5 \text{ cm} \end{array}} \right\} \Rightarrow BC = 6 + 5 = 11 \text{ cm}$$

b) $P_{\Delta ABC} = AB + BC + CA = 10 + 11 + 9 = 30 \text{ cm}$

Exercițiul 5. Trapezul isoscel $ABCD$ ($AB \parallel CD$) este circumscris unui cerc (laturile sunt tangente la cerc). Dacă bazele au lungimile $AB = 18$ cm și $CD = 8$ cm:

- (a) Demonstrează că suma bazelor este egală cu suma laturilor neperalele ($AB + CD = AD + BC$).
- (b) Calculează lungimea laturii neperalele BC .



a)

Fie punctele de tangență M, N, P, Q

AM, AP - tangente $\Rightarrow AM = AP$
Teorema tangentelor

BM, BN - tangente $\Rightarrow BM = BN$
Teorema tangentelor

CN, CQ - tangente $\Rightarrow CN = CQ$
Teorema tangentelor

DQ, DP - tangente $\Rightarrow DQ = DP$
Teorema tangentelor

$$AB = AM + MB$$

$$DC = DQ + QC$$

$$AD = AP + PD$$

$$BC = BN + NC$$

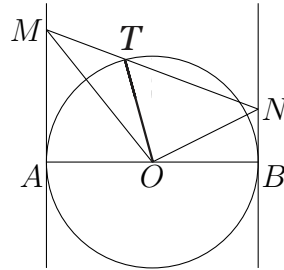
$$\left. \begin{array}{l} AB + CD = AM + MB + DQ + QC = AP + BN + DP + CN \\ AD + BC = AP + PD + BN + NC \end{array} \right\} \Rightarrow AB + CD = AD + BC$$

b) $ABCD$ - trapez isoscel $\Rightarrow AD = BC$

$$AB + CD = AD + BC$$

$$AB + CD = 2BC \Rightarrow BC = \frac{AB + CD}{2} = \frac{18 + 8}{2} = \frac{26}{2} = 13 \text{ cm}$$

Exercițiul 6. Fie AB un diametru al cercului $C(O, r)$. Tangentele la cerc în punctele A și B sunt intersectate de o a treia tangentă MN (M pe tangenta din A , N pe tangenta din B , punctul de tangență fiind T). Demonstrează că triunghiul MON este dreptunghic în O .



Din punctul M plăcă 2 tangente la cerc: MA și MT

conform Teoremei tangentelor duse dintr-un punct exterior:

$$1. \quad MA = MT$$

$$2. \quad (OM - \text{bisectoarea } \sphericalangle AOT \Rightarrow m(\sphericalangle AOM) = m(\sphericalangle MOT) = x$$

$$m(\sphericalangle AOT) = m(\sphericalangle AOM) + m(\sphericalangle MOT) \Rightarrow m(\sphericalangle AOT) = 2x$$

Din punctul N plăcă 2 tangente la cerc: NB și NT

conform Teoremei tangentelor duse dintr-un punct exterior:

$$1. \quad NB = NT$$

$$2. \quad (ON - \text{bisectoarea } \sphericalangle BOT \Rightarrow m(\sphericalangle BON) = m(\sphericalangle TON) = y$$

$$m(\sphericalangle BOT) = m(\sphericalangle BON) + m(\sphericalangle TON) \Rightarrow m(\sphericalangle BOT) = 2y$$

AB - diametru $\Rightarrow A-O-B$ - coliniare $\Rightarrow \sphericalangle AOB$ - unghi alungit

$$m(\sphericalangle AOB) = 180^\circ$$

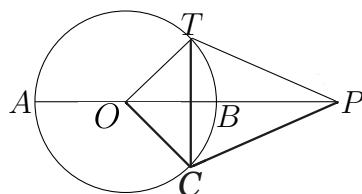
$$\underbrace{m(\sphericalangle BOT)}_{2y} + \underbrace{m(\sphericalangle AOT)}_{2x} = m(\sphericalangle AOB) \Rightarrow 2x + 2y = 180 / : 2$$

$$x + y = 90^\circ$$

$$m(\sphericalangle MON) = \underbrace{m(\sphericalangle MOT)}_x + \underbrace{m(\sphericalangle NOT)}_y$$

$$m(\sphericalangle MON) = x + y = 90^\circ \Rightarrow \triangle MON - \text{dreptunghic în } O$$

Exercițiul 7. Pe prelungirea diametrului AB al unui cerc se ia un punct P . Prin P se duce o tangentă PT la cerc (T punct de tangență). Dacă triunghiul PTC este isoscel cu $PT = PC$ (unde C este un punct pe cerc astfel încât T, O, C nu sunt coliniare, dar vom considera cazul specific legat de unghiuri), arată relația dintre unghiul $\angle TPC$ și arcul $\widehat{TC}$.



$$\triangle PTC - \text{isoscel cu } PT = PC \Rightarrow m(\angle CTP) = m(\angle TCP)$$

$$m(\angle CTP) + m(\angle TCP) + m(\angle TPC) = 180^\circ$$

$$2m(\angle TCP) + m(\angle TPC) = 180^\circ \Rightarrow m(\angle TCP) = \frac{180^\circ - m(\angle TPC)}{2}$$

$$\triangle OTC : OT = OC = r \Rightarrow \triangle OTC - \text{isoscel} \Rightarrow m(\angle OTC) = m(\angle OCT)$$

Obs.: Tangenta la un cerc este perpendiculară pe raza în punctul de tangență.

$$OT \perp PT \Rightarrow m(\angle OTP) = 90^\circ$$

$$m(\angle OTC) + m(\angle CTP) = m(\angle OTP) = 90^\circ$$

$$m(\angle OTC) = 90^\circ - m(\angle CTP) = 90^\circ - m(\angle TCP)$$

$$m(\angle OTC) = 90^\circ - \left(\frac{180^\circ - m(\angle TPC)}{2} \right) = 90^\circ - \left(\frac{180^\circ}{2} - \frac{m(\angle TPC)}{2} \right)$$

$$m(\angle OTC) = \cancel{90^\circ} - \cancel{90^\circ} + \frac{m(\angle TPC)}{2} = \frac{m(\angle TPC)}{2}$$

$$\text{În } \triangle OTC : m(\angle TOC) + \underbrace{m(\angle OCT) + m(\angle OTC)}_{\text{egale}} = 180^\circ$$

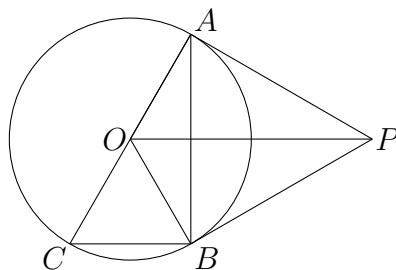
$$m(\angle TOC) = 180^\circ - 2m(\angle OTC) = 180^\circ - \cancel{2} \cdot \frac{m(\angle TPC)}{\cancel{2}}$$

$$m(\angle TOC) = 180^\circ - m(\angle TPC)$$

$m(\angle TOC) + m(\angle TPC) = 180^\circ \Rightarrow \angle TOC$ și $\angle TPC$ - suplementare
 $\angle TOC$ - unghiul corespunzător lui $\widehat{AC}$.

Exercițiul 8. Fie P un punct exterior cercului $\mathcal{C}(O, r)$. Se construiesc tangentele PA și PB la cerc, unde A și B sunt punctele de contact. Fie AC un diametru al cercului.

- (a) Demonstrează că dreapta OP este paralelă cu coarda BC .
 (b) Dacă măsura unghiului $\angle APB = 120^\circ$ (unde C, O, A sunt coliniare), calculează măsurile unghiurilor triunghiului ABC .



a)

conform Teoremei tangentelor duse dintr-un punct exterior:

1. $PA = PB$

2. OP - bisectoarea $\angle AOB$

În $\triangle PAB$: $PA = PB \Rightarrow \triangle PAB$ - isoscel $\left. \begin{array}{l} \Rightarrow OP - \text{înălțime} \\ (OP - \text{bisectoare}) \end{array} \right\} \Rightarrow OP \perp AB$

În $\triangle ABC$: AC - diametru $\Rightarrow m(\angle ABC) = 90^\circ \Rightarrow BC \perp AB$ (1)

$OP \perp AB$
 $BC \perp AB$ $\left. \begin{array}{l} \Rightarrow OP \parallel BC \end{array} \right\}$

b)

$\triangle PAB$ - isoscel $\Rightarrow m(\angle PAB) = m(\angle PBA)$

$m(\angle PAB) + m(\angle PBA) + m(\angle APB) = 180^\circ$

$2m(\angle PAB) + 120^\circ = 180^\circ \quad | -120^\circ$

$2m(\angle PAB) = 60^\circ \quad | :2 \Rightarrow m(\angle PAB) = 30^\circ$

$OA \perp PA \Rightarrow m(\angle OAP) = 90^\circ$

$O-A-C$ coliniare $\Rightarrow \angle BAC \equiv \angle OAB \left. \begin{array}{l} \Rightarrow m(\angle OAP) = m(\angle BAC) + m(\angle PAB) \\ m(\angle OAP) = m(\angle OAB) + m(\angle PAB) \end{array} \right\}$

$m(\angle BAC) = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ, m(\angle ABC) = 90^\circ$ (1)

$m(\angle ABC) + m(\angle BAC) + m(\angle ACB) = 180^\circ \Rightarrow m(\angle ACB) = 180^\circ - 90^\circ - 60^\circ$
 $m(\angle ACB) = 30^\circ$