

## Lecția 3 - Raportul ariilor a două triunghiuri asemenea

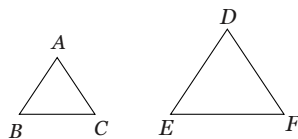
Clasa a 7-a – Capitolul Geometrie

### Instrucțiuni

Rezolvă exercițiile folosind teorema raportului ariilor: raportul ariilor a două triunghiuri asemenea este egal cu pătratul raportului de asemănare.  
Durata recomandată: **50 de minute**.

### Exerciții

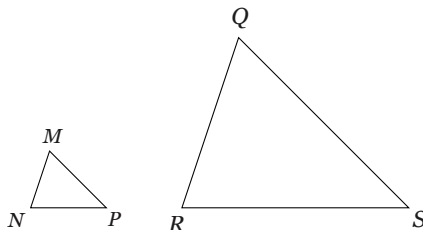
**Exercițiul 1.** Se consideră două triunghiuri asemenea  $\triangle ABC \sim \triangle DEF$ . Știind că raportul de asemănare este  $k = \frac{AB}{DE} = \frac{2}{3}$ , calculează valoarea raportului  $\frac{A_{ABC}}{A_{DEF}}$ .



*Raportul ariilor a două triunghiuri asemenea este egal cu pătratul raportului de asemănare.*

$$\triangle ABC \sim \triangle DEF \Rightarrow \frac{A_{ABC}}{A_{DEF}} = k^2 = \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$$

**Exercițiul 2.** Triunghiurile  $\triangle MNP$  și  $\triangle QRS$  sunt asemenea. Latura  $MN = 4$  cm, iar latura omoloagă  $QR = 12$  cm. Dacă aria triunghiului  $MNP$  este de  $6 \text{ cm}^2$ , determină aria triunghiului  $QRS$ .



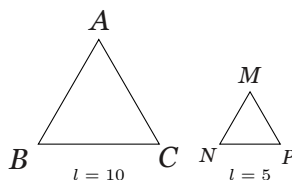
$$\triangle MNP \sim \triangle QRS \Rightarrow k = \frac{MN}{QR} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$$

$$\frac{A_{MNP}}{A_{QRS}} = k^2 \Rightarrow A_{QRS} = \frac{A_{MNP}}{k^2}$$

$$A_{QRS} = \frac{6}{\left(\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{6}{\frac{1}{9}} = 6 \cdot 9 = 54 \text{ cm}^2$$

**Exercițiul 3.** Fie  $\triangle ABC$  un triunghi echilateral cu latura de 10 cm și  $\triangle MNP$  un triunghi echilateral cu latura de 5 cm.

- (a) Verifică dacă triunghiurile sunt asemenea și scrie raportul de asemănare.  
 (b) Calculează raportul ariilor  $\frac{A_{MNP}}{A_{ABC}}$  fără a calcula efectiv ariile.



a)  $\triangle ABC$  - echilateral  $\Rightarrow m(\angle A) = m(\angle B) = m(\angle C) = 60^\circ$   
 $\triangle MNP$  - echilateral  $\Rightarrow m(\angle M) = m(\angle N) = m(\angle P) = 60^\circ$

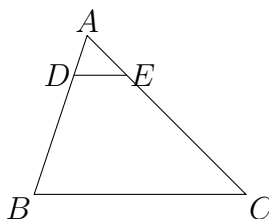
considerăm  $\triangle ABC$  și  $\triangle MNP$

$\angle A = \angle M$   
 $\angle B = \angle N$   $\left. \begin{array}{l} \text{U.U.} \\ \text{U.U.} \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle MNP \sim \triangle ABC \Rightarrow \frac{MN}{AB} = \frac{NP}{BC} = \frac{MP}{AC} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2} = k$

b)  $\frac{A_{MNP}}{A_{ABC}} = k^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$

**Exercițiul 4.** În triunghiul  $ABC$ , pe latura  $AB$  se ia punctul  $D$  astfel încât  $\frac{AD}{AB} = \frac{1}{4}$ . Prin  $D$  se duce o paralelă la  $BC$  care intersectează  $AC$  în  $E$ .

- (a) Determină raportul ariilor  $\frac{A_{ADE}}{A_{ABC}}$ .  
 (b) Dacă aria trapezului  $DBCE$  este egală cu  $45 \text{ cm}^2$ , calculează aria triunghiului  $ADE$ .



a)  $DE \parallel BC \xRightarrow{\text{T.F.A.}} \triangle ADE \sim \triangle ABC \Rightarrow \frac{AD}{AB} = \frac{DE}{BC} = \frac{AE}{AC} = k \left. \begin{array}{l} \Rightarrow k = \frac{1}{4} \\ \frac{AD}{AB} = \frac{1}{4} \end{array} \right\}$

$\frac{A_{ADE}}{A_{ABC}} = k^2 = \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{16} \Rightarrow A_{ABC} = 16 A_{ADE}$

b)

$A_{ABC} = A_{ADE} + A_{DBCE}$

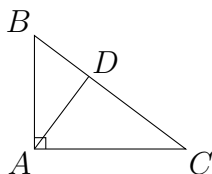
$16 A_{ADE} = A_{ADE} + 45 \quad | - A_{ADE}$

$15 A_{ADE} = 45 \quad | : 15 \Rightarrow A_{ADE} = 3 \text{ cm}^2$

**Exercițiul 5.** Triunghiul dreptunghic  $ABC$  ( $\angle A = 90^\circ$ ) are catetele  $AB = 6$  cm,  $AC = 8$  cm și ipotenuza  $BC = 10$  cm. Se construiește înălțimea  $AD \perp BC$ .

(a) Demonstrează că  $\triangle DBA \sim \triangle ABC$ .

(b) Calculează raportul ariilor  $\frac{A_{\triangle DBA}}{A_{\triangle ABC}}$ .



a)

$\triangle ABC$  - dreptunghic:

$$AD \perp BC, D \in BC \Rightarrow m(\angle ADB) = m(\angle ADC) = 90^\circ$$

considerăm  $\triangle DBA$  și  $\triangle ABC$

$$\left. \begin{array}{l} \angle ADB \equiv \angle ADC \text{ (unghiuri drepte)} \\ \angle B \text{ - unghi comun} \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{u.u.}} \triangle DBA \sim \triangle ABC$$

b)

$$\triangle DBA \sim \triangle ABC \Rightarrow \frac{DB}{AB} = \frac{BA}{BC} = \frac{DA}{AC} = k$$

$$AB = 6 \text{ cm}$$

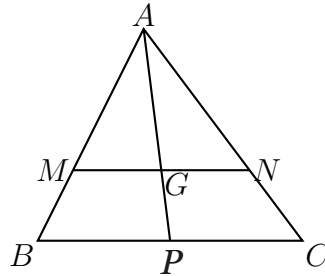
$$AC = 8 \text{ cm}$$

$$BC = 10 \text{ cm}$$

$$\frac{AB}{BC} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5} = k$$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{A_{\triangle DBA}}{A_{\triangle ABC}} = k^2 \\ k = \frac{3}{5} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{A_{\triangle DBA}}{A_{\triangle ABC}} = \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{9}{25}$$

**Exercițiul 6.** Fie  $G$  centrul de greutate al triunghiului  $ABC$ . Prin  $G$  se duce o paralelă  $MN$  la latura  $BC$  ( $M \in AB, N \in AC$ ). Calculează raportul dintre aria triunghiului  $AMN$  și aria triunghiului  $ABC$ .



Fie  $AP$  - mediană,  $P \in BC$   
 $G$  = centru de greutate  $\Rightarrow AG = \frac{2}{3} AP$

$MN \parallel BC \xRightarrow{T.F.A.} \Delta AMN \sim \Delta ABC \Rightarrow \frac{AM}{AB} = \frac{MN}{BC} = \frac{AN}{AC} = k$

Obs.:

Raportul înălțimilor, al medianelor și al bisectoarelor a formelor din vârfurile corespundente este egal cu raportul de asemănare al celor două triunghiuri

$$k = \frac{AG}{AP} \Rightarrow k = \frac{\frac{2}{3} AP}{AP}$$

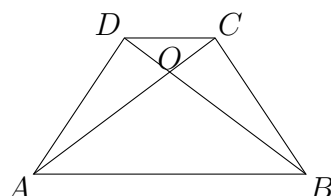
$$AG = \frac{2}{3} AP \Rightarrow k = \frac{\cancel{2} \cancel{AP}}{3} \cdot \frac{1}{\cancel{AP}}$$

$$\frac{A_{\Delta AMN}}{A_{\Delta ABC}} = k^2 \Rightarrow \frac{A_{\Delta AMN}}{A_{\Delta ABC}} = \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$$

$$k = \frac{2}{3}$$

**Exercițiul 7.** Se consideră trapezul  $ABCD$  cu bazele  $AB \parallel CD$  și  $AB = 3 \cdot CD$ . Diagonalele se intersectează în punctul  $O$ .

- (a) Determină raportul de asemănare al triunghiurilor  $\triangle COD$  și  $\triangle AOB$ .  
 (b) Dacă aria triunghiului  $\triangle COD$  este  $4 \text{ cm}^2$ , calculează aria triunghiului  $\triangle AOB$ .



a)

$$AB \parallel CD \xRightarrow{\text{T.F.A.}} \triangle COD \sim \triangle AOB$$

$$\triangle COD \sim \triangle AOB \Rightarrow \frac{CO}{AO} = \frac{OD}{OB} = \frac{CD}{AB} = k$$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{CD}{AB} = k \\ AB = 3CD \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} k = \frac{CD}{3CD} \\ k = \frac{1}{3} \end{array}$$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{A_{\triangle COD}}{A_{\triangle AOB}} = k^2 \\ k = \frac{1}{3} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{A_{\triangle COD}}{A_{\triangle AOB}} = \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}$$

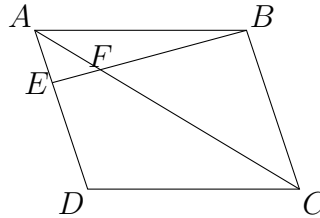
b)  $A_{\triangle COD} = 4 \text{ cm}^2$

$$\frac{A_{\triangle COD}}{A_{\triangle AOB}} = \frac{1}{9} \Rightarrow A_{\triangle AOB} = 9 A_{\triangle COD}$$

$$A_{\triangle AOB} = 9 \cdot 4$$

$$A_{\triangle AOB} = 36 \text{ cm}^2$$

**Exercițiul 8.** În paralelogramul  $ABCD$ , punctul  $E$  se află pe latura  $AD$  astfel încât  $AE = \frac{1}{3}AD$ . Dreapta  $BE$  intersectează diagonala  $AC$  în punctul  $F$ . Calculează raportul ariilor  $\frac{A_{AEF}}{A_{CBF}}$ .



$$ABCD - \text{paralelogram} \Rightarrow \begin{cases} AB \parallel DC, & AB = DC \\ AD \parallel BC, & AD = BC \end{cases}$$

$$\begin{matrix} AD \parallel BC \\ E \in AD \end{matrix} \Bigg\} \Rightarrow AE \parallel BC$$

$AE \parallel BC \Rightarrow$  unghiurile  $\angle EAF$  și  $\angle BCF$  formate de  $AC$  și  $EB$  sunt congruente  
 $\angle EAF \equiv \angle BCF$

considerăm  $\triangle AEF$  și  $\triangle CBF$

$$\begin{matrix} \angle EAF \equiv \angle BCF & (\text{alterne interne}) \\ \angle AFE \equiv \angle CFB & (\text{opuse la vârf}) \end{matrix} \Bigg\} \xRightarrow{\text{u.u.}} \triangle AEF \sim \triangle CBF$$

$$\triangle AEF \sim \triangle CBF \Rightarrow \frac{AE}{CB} = \frac{EF}{BF} = \frac{AF}{CF} = k$$

$$k = \frac{AE}{BC}$$

$$\begin{matrix} AE = \frac{1}{3} AD \\ AD = BC \end{matrix} \Bigg\} \Rightarrow AE = \frac{1}{3} BC$$

$$k = \frac{\frac{1}{3} BC}{BC} = \frac{1}{3} \cdot \cancel{BC} \cdot \frac{1}{\cancel{BC}} = \frac{1}{3} \quad 6$$

$$\frac{A_{\triangle AEF}}{A_{\triangle CBF}} = k^2 = \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}$$