

Lecția 9 – Trunchiul de piramidă regulată

Clasa a 8-a – Capitolul 3 – Geometrie în spațiu

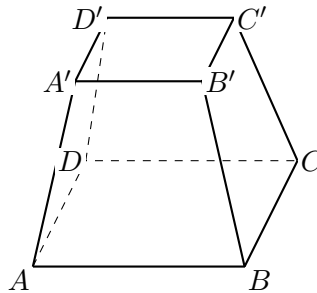
Instrucțiuni

Rezolvă exercițiile folosind formulele pentru aria laterală (A_l), aria totală (A_t) și volumul (V) trunchiului de piramidă regulată. Durata recomandată: **45–50 minute**.

Exerciții

Exercițiul 1. Se consideră un trunchi de piramidă patrulateră regulată $ABCD A' B' C' D'$. Notați pe desen:

- (a) O muchie a bazei mari și o muchie a bazei mici.
- (b) Înălțimea trunchiului (h) și apotema trunchiului (a_t).



Exercițiul 2. Un trunchi de piramidă patrulateră regulată are latura bazei mari $L = 10$ cm și latura bazei mici $l = 4$ cm. Apotema trunchiului este $a_t = 5$ cm. Calculați aria laterală a trunchiului.

Exercițiul 3. Un trunchi de piramidă patrulateră regulată are aria bazei mari $A_B = 100$ cm² și aria bazei mici $A_b = 36$ cm². Înălțimea trunchiului este $h = 3$ cm. Calculați volumul trunchiului de piramidă.

Exercițiul 4. Un trunchi de piramidă triunghiulară regulată are latura bazei mari $L = 18$ cm, latura bazei mici $l = 6$ cm și apotema trunchiului $a_t = 8$ cm. Calculați aria totală a trunchiului de piramidă.

Exercițiul 5. Într-un trunchi de piramidă triunghiulară regulată, latura bazei mari este 12 cm, latura bazei mici este 6 cm, iar apotema trunchiului face un unghi de 60° cu planul bazei mari. Calculați înălțimea trunchiului.

Exercițiul 6. Aria totală a unui trunchi de piramidă patrulateră regulată este de 320 cm^2 . Aria bazei mari este 144 cm^2 , iar aria bazei mici este 64 cm^2 . Calculați apotema trunchiului.

Exercițiul 7. Un trunchi de piramidă patrulateră regulată are latura bazei mari $L = 20 \text{ cm}$, latura bazei mici $l = 8 \text{ cm}$ și aria laterală egală cu aria bazei mari. Calculați volumul trunchiului de piramidă.

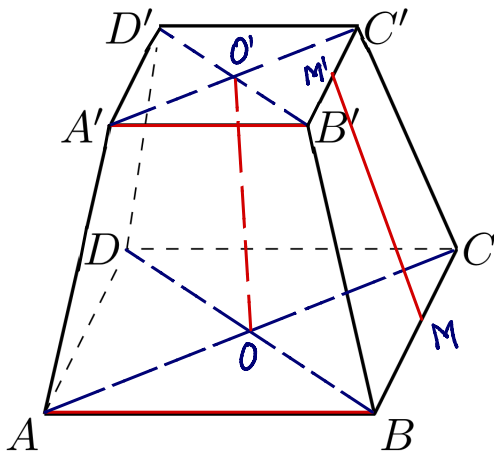
Exercițiul 8. Fie un trunchi de piramidă triunghiulară regulată $ABCA'B'C'$ cu latura bazei mari 12 cm, latura bazei mici 4 cm și muchia laterală de 8 cm. Calculați volumul piramidei din care provine trunchiul.

$$V = \frac{1}{3} \cdot A_{\text{bazei}} \cdot h$$

Succes!

Exercițiul 1. Se consideră un trunchi de piramidă patrulateră regulată $ABCD A' B' C' D'$. Notați pe desen:

- O muchie a bazei mari și o muchie a bazei mici.
- Înălțimea trunchiului (h) și apotema trunchiului (a_t).



a) O muchie a bazei mari: AB

O muchie a bazei mici: $A'B'$

b) $h = O'O$, unde:

$$A'C' \cap B'D' = \{O'\}$$

$$AC \cap BD = \{O\}$$

$a_t = M'M$, unde M' și M sunt mijloacele muchiilor $B'C'$ și BC

Exercițiul 2. Un trunchi de piramidă patrulateră regulată are latura bazei mari $L = 10$ cm și latura bazei mici $l = 4$ cm. Apotema trunchiului este $a_t = 5$ cm. Calculați aria laterală a trunchiului.

Putem observa desenele de la ex. 1.

$$A_l = \frac{(P_B + P_b) \cdot a_t}{2}$$

$$P_B = 4 \cdot L = 4 \cdot 10 = 40 \text{ cm}$$

$$P_b = 4 \cdot l = 4 \cdot 4 = 16 \text{ cm}$$

$$\Rightarrow A_l = \frac{(40 + 16) \cdot 5}{2} = \frac{28 \cdot 5}{2} = 140 \text{ cm}^2$$

$$A_l = 28 \cdot 5 \Rightarrow A_l = 140 \text{ cm}^2$$

Exercițiul 3. Un trunchi de piramidă patrulateră regulată are aria bazei mari $A_B = 100 \text{ cm}^2$ și aria bazei mici $A_b = 36 \text{ cm}^2$. Înălțimea trunchiului este $h = 3$ cm. Calculați volumul trunchiului de piramidă.

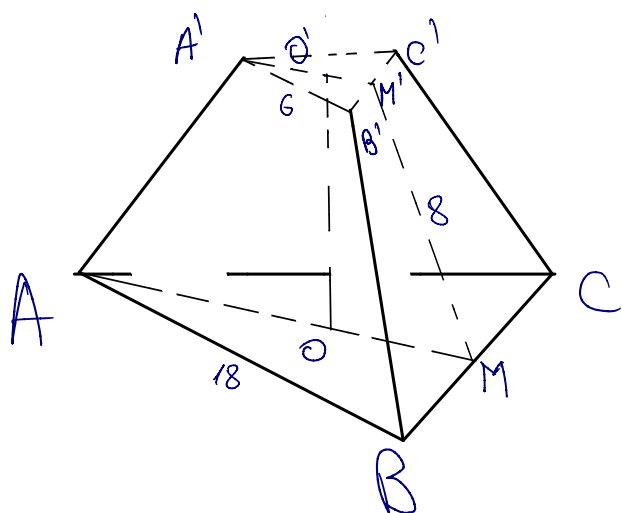
Putem observa desenele de la ex. 1.

$$V = \frac{h}{3} (A_B + A_b + \sqrt{A_B \cdot A_b})$$

$$\Rightarrow V = \frac{3}{3} (100 + 36 + \sqrt{100 \cdot 36}) = 136 + \sqrt{100} \cdot \sqrt{36}$$

$$V = 136 + 10 \cdot 6 = 136 + 60 \Rightarrow V = 196 \text{ cm}^3$$

Exercițiul 4. Un trunchi de piramidă triunghiulară regulată are latura bazei mari $L = 18$ cm, latura bazei mici $l = 6$ cm și apotema trunchiului $a_t = 8$ cm. Calculați aria totală a trunchiului de piramidă.



$$A_t = A_B + A_L + A_L \quad (1)$$

$$A_B = \frac{L^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{18^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{18 \cdot 18 \cdot \sqrt{3}}{4} \quad (2)$$

$$\Rightarrow A_B = 81\sqrt{3} \text{ cm}^2 \quad (2)$$

$$A_L = \frac{l^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{6^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{36 \sqrt{3}}{4} \quad (3)$$

$$\Rightarrow A_L = 9\sqrt{3} \text{ cm}^2 \quad (3)$$

$$A_L = \frac{(P_B + P_b) \cdot a_t}{2}$$

$$P_B = 3L = 3 \cdot 18 = 54 \text{ cm}$$

$$P_b = 3l = 3 \cdot 6 = 18 \text{ cm}$$

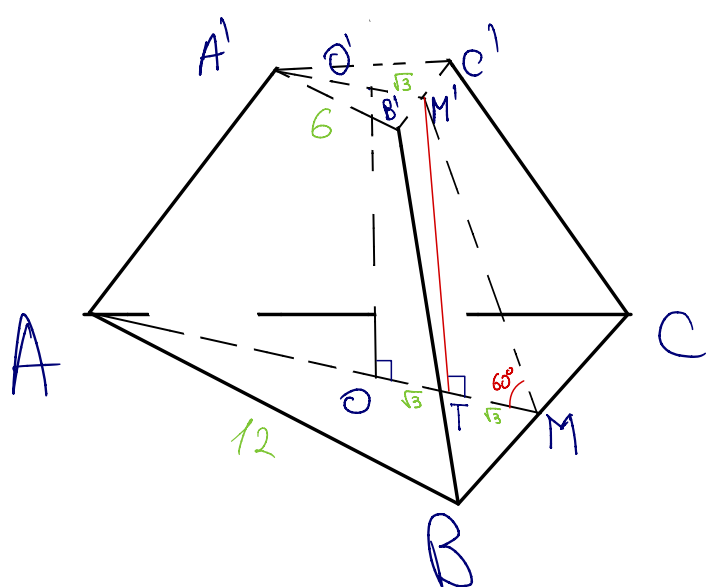
$$\Rightarrow A_L = \frac{(54 + 18) \cdot 8}{2} = 72 \cdot 4$$

$$A_L = 288 \text{ cm}^2 \quad (4)$$

$$\text{Dim } (1), (2), (3) \text{ și } (4) \Rightarrow A_t = 81\sqrt{3} + 9\sqrt{3} + 288$$

$$\Rightarrow A_t = (90\sqrt{3} + 288) \text{ cm}^2$$

Exercițiul 5. Într-un trunchi de piramidă triunghiulară regulată, latura bazei mari este 12 cm, latura bazei mici este 6 cm, iar apotema trunchiului face un unghi de 60° cu planul bazei mari. Calculați înălțimea trunchiului.



$$L = AB = 12 \text{ cm}$$

$$l = A'B' = 6 \text{ cm}$$

$$\angle M'MO = 60^\circ$$

Deoarece $\triangle ABC$ și $\triangle A'B'C'$ sunt echilaterale $\Rightarrow$
 $\Rightarrow O$ și O' sunt centre de greutate

$$\Rightarrow OM = \frac{1}{3} \cdot AM \text{ și } O'M' = \frac{1}{3} \cdot A'M'$$

Dar AM și $A'M'$ sunt și înălțimi (deoarece triunghiurile sunt echilaterale) $\Rightarrow$

$$\begin{cases} AM = \frac{L\sqrt{3}}{2} \\ A'M' = \frac{l\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow OM = \frac{1}{3} \cdot \frac{L\sqrt{3}}{2} = \frac{12\sqrt{3}}{6} = 2\sqrt{3} \text{ cm}$$

$$\Rightarrow O'M' = \frac{1}{3} \cdot \frac{l\sqrt{3}}{2} = \frac{6\sqrt{3}}{3} = \sqrt{3} \text{ cm}$$

Fie $M'T \perp AM$, $T \in AM$.

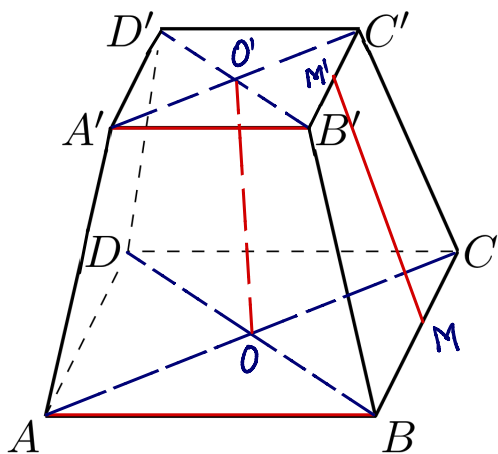
$$O'M'TO \text{ dreptunghi} \Rightarrow O'M' = OT = \sqrt{3} \text{ cm}$$

$$TM = OM - OT = 2\sqrt{3} - \sqrt{3} \Rightarrow TM = \sqrt{3} \text{ cm}$$

$$\left. \begin{aligned} \text{În } \triangle M'TM \text{ dreptunghic: } \tan \widehat{M'MT} &= \frac{M'T}{TM} \\ \tan \widehat{M'MT} &= \tan 60^\circ = \sqrt{3} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{M'T}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$$

$$\Rightarrow M'T = \sqrt{3} \text{ cm} \Rightarrow O'O = \sqrt{3} \text{ cm} \Rightarrow R = 3 \text{ cm}$$

Exercițiul 6. Aria totală a unui trunchi de piramidă patrulateră regulată este de 320 cm^2 . Aria bazei mari este 144 cm^2 , iar aria bazei mici este 64 cm^2 . Calculați apotema trunchiului.



$$A_t = A_l + A_B + A_b$$

Înlocuim ce știm din enunț:

$$320 = A_l + 144 + 64$$

$$320 = A_l + 208 \Rightarrow \underline{A_l = 112 \text{ cm}^2}$$

$$A_B = 144 \text{ cm}^2$$

$$ABCO \text{ pătrat} \Rightarrow A_B = L^2$$

$$\Rightarrow L^2 = 144 \Rightarrow L = \sqrt{144} = 12 \text{ cm}$$

$$A_b = 64 \text{ cm}^2$$

$$A'B'C'D' \text{ pătrat} \Rightarrow A_b = l^2$$

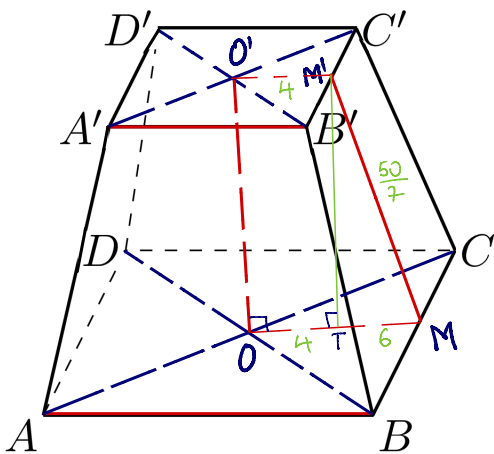
$$\Rightarrow l^2 = 64 \Rightarrow l = \sqrt{64} = 8 \text{ cm}$$

$$A_l = \frac{(P_B + P_b) \cdot a_t}{2} \Rightarrow \underline{112} = \frac{(4 \cdot L + 4 \cdot l) \cdot a_t}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{4(L+l) \cdot a_t}{2} = 112 \Rightarrow 2 \cdot (12+8) \cdot a_t = 112$$

$$2 \cdot 20 \cdot a_t = 112 \Rightarrow a_t = \frac{112}{40} = 2,8 \text{ cm} = MM'$$

Exercițiul 7. Un trunchi de piramidă patrulateră regulată are latura bazei mari $L = 20$ cm, latura bazei mici $l = 8$ cm și aria laterală egală cu aria bazei mari. Calculați volumul trunchiului de piramidă.



$$\begin{aligned} A_e &= A_B \left\{ \begin{aligned} &\Rightarrow A_e = l^2 = 20^2 \\ &\Rightarrow A_e = 400 \text{ cm}^2 \end{aligned} \right. \\ A_B &= L^2 \end{aligned}$$

$$V = \frac{h}{3} (A_B + A_e + \sqrt{A_B \cdot A_e})$$

$$A_e = \frac{(P_B + P_e) \cdot a_t}{2} \Rightarrow 400 = \frac{(4L + 4l) \cdot a_t}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{4(20 + 8) \cdot a_t}{2} = 400 \Rightarrow 2 \cdot 28 \cdot a_t = 400 \Rightarrow a_t = \frac{400}{56} = \frac{50}{7}$$

$$\Rightarrow a_t = \frac{50}{7} \text{ cm} = M'M$$

Trebuie să aflăm $h(OO')$.

Fie $M'T \perp OM$, $T \in OM$.

$$\text{În } \triangle C'A'B': O'M' \text{ linie mijlocie} \Rightarrow O'M' = \frac{A'B'}{2} = \frac{l}{2} = 4 \text{ cm}$$

$$\text{În } \triangle CAB: OM \text{ linie mijlocie} \Rightarrow OM = \frac{AB}{2} = \frac{L}{2} = 10 \text{ cm}$$

$$O'M'TO \text{ dreptunghi} \Rightarrow O'M' = OT = 4 \text{ cm}$$

$$TM = OM - OT = 10 - 4 \Rightarrow TM = 6 \text{ cm}$$

$$\text{În } \triangle M'TM \text{ dreptunghi aplic T.P.: } M'M^2 = M'T^2 + TM^2$$

$$\Rightarrow \left(\frac{50}{7}\right)^2 = M'T^2 + 6^2 \Rightarrow \frac{2500}{49} = M'T^2 + 36 \quad | -36$$

$$M'T^2 = \frac{2500}{49} - 36 = \frac{2500 - 49 \cdot 36}{49} = \frac{2500 - 1764}{49}$$

$$M'T^2 = \frac{736}{49} \Rightarrow M'T = \sqrt{\frac{736}{49}} = \frac{\sqrt{736}}{\sqrt{49}} = \frac{4\sqrt{46}}{7} \quad \left. \vphantom{\frac{736}{49}} \right\} \Rightarrow$$

$$M'T = O'O = R$$

$$\Rightarrow R = \frac{4\sqrt{46}}{7} \text{ cm}$$

$$\Rightarrow V = \frac{\frac{4\sqrt{46}}{7}}{3} \cdot \left(L^2 + l^2 + \sqrt{L^2 \cdot l^2} \right) = \frac{4\sqrt{46}}{21} \cdot (20^2 + 8^2 +$$

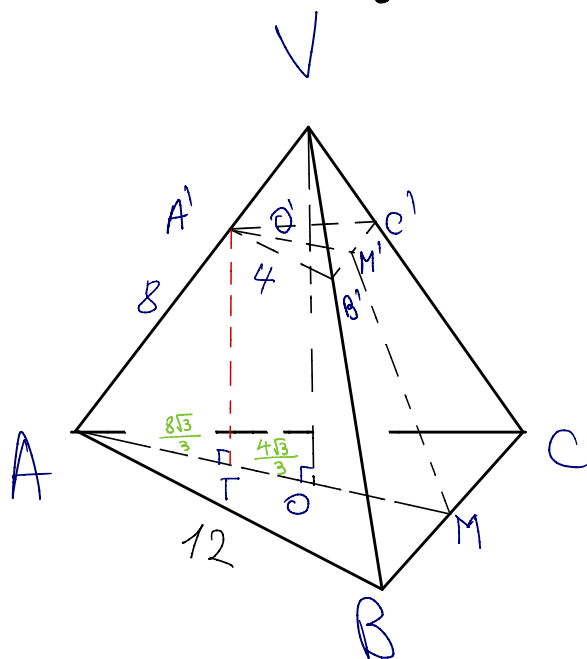
$$+ \sqrt{20^2 \cdot 8^2}) = \frac{4\sqrt{46}}{21} \cdot (400 + 64 + \sqrt{20^2 \cdot 8^2})$$

$$V = \frac{4\sqrt{46}}{21} \cdot (464 + 20 \cdot 8) = \frac{4\sqrt{46}}{21} \cdot (464 + 160) =$$

$$= \frac{4\sqrt{46}}{\cancel{21}^7} \cdot \overset{208}{\cancel{624}} \Rightarrow V = \frac{832\sqrt{46}}{7} \text{ cm}^3$$

Exercițiul 8. Fie un trunchi de piramidă triunghiulară regulată $ABCA'B'C'$ cu latura bazei mari 12 cm, latura bazei mici 4 cm și muchia laterală de 8 cm. Calculați volumul piramidei din care provine trunchiul.

$$V = \frac{1}{3} \cdot A_{\text{bazei}} \cdot h$$



$$AM = \frac{L\sqrt{3}}{2}$$

O - centru de greutate

$$\Rightarrow AO = \frac{2}{3} \cdot \frac{L\sqrt{3}}{2} = \frac{L\sqrt{3}}{3} = \frac{12\sqrt{3}}{3} = 4\sqrt{3} \text{ cm}$$

$$A'M' = \frac{L'\sqrt{3}}{2}$$

O' - centru de greutate

$$\Rightarrow A'O' = \frac{2}{3} \cdot \frac{L'\sqrt{3}}{2} = \frac{L'\sqrt{3}}{3} = \frac{4\sqrt{3}}{3} \text{ cm}$$

Fie $A'T \perp AO, T \in AO$

$A'TO'O'$ dreptunghi $\Rightarrow A'O' = TO = \frac{4\sqrt{3}}{3} \text{ cm}$

$$AT = AO - TO = 4\sqrt{3} - \frac{4\sqrt{3}}{3} = \frac{12\sqrt{3} - 4\sqrt{3}}{3} \Rightarrow AT = \frac{8\sqrt{3}}{3} \text{ cm}$$

În $\triangle A'TA$ dreptunghic aplic TP: $A'A^2 = A'T^2 + AT^2$

$$8^2 = A'T^2 + \left(\frac{8\sqrt{3}}{3}\right)^2 \Rightarrow A'T^2 = 64 - \frac{8^2 \cdot 3}{3^2} = 64 - \frac{64}{3}$$

$$A'T^2 = \frac{192 - 64}{3} = \frac{128}{3} \Rightarrow A'T = \sqrt{\frac{128}{3}} = \frac{\sqrt{128}}{\sqrt{3}} = \frac{8\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow A'T = \frac{8\sqrt{6}}{3} \Rightarrow O'O = \frac{8\sqrt{6}}{3} \text{ cm}$$

$$(A'B'C') \parallel (ABC) \Rightarrow \frac{A'B'}{AB} = \frac{VO'}{VO} \Rightarrow \frac{4}{12} = \frac{VO'}{VO + O'O} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{3} = \frac{VO'}{VO + \frac{8\sqrt{6}}{3}} \Rightarrow 3VO' = VO' + \frac{8\sqrt{6}}{3} \Rightarrow 2VO' = \frac{8\sqrt{6}}{3} \quad | : 2$$

$$VO' = \frac{4\sqrt{6}}{3} \Rightarrow VO' = \frac{4\sqrt{6}}{3}$$

$$\Rightarrow V_0 = V_0' + 0'0 = \frac{4\sqrt{6}}{3} + \frac{8\sqrt{6}}{3} = \frac{12\sqrt{6}}{3} \Rightarrow V_0 = 4\sqrt{6} \text{ cm}$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot A_{\text{base}} \cdot R \Rightarrow V = \frac{1}{3} \cdot \frac{12^2\sqrt{3}}{4} \cdot 10 \Rightarrow V = \frac{1}{3} \cdot \frac{12^2\sqrt{3}}{4} \cdot 4\sqrt{6}$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot 12 \cdot 12 \cdot \sqrt{18} = 48 \cdot 3\sqrt{2} \Rightarrow V = 144\sqrt{2} \text{ cm}^3$$