



Fișă de lucru

Lecția 2 – Proprietățile triunghiului echilateral

Clasa a 6-a – Capitolul 4 - Proprietățile și clasificarea triunghiurilor

Instrucțiuni

Reține:

- Toate laturile sunt congruente ($AB = BC = AC$).
- Toate unghiurile sunt congruente și au măsura de 60° .
- **Proprietate cheie:** Orice linie importantă (înălțime, bisectoare, mediană, mediatoare) coincide. Centrul cercului înscris, circumscris, ortocentrul și centrul de greutate sunt același punct.

Durata recomandată: **50 minute**.

Exerciții

Exercițiul 1. Fie triunghiul isoscel ABC cu $AB = AC$. Știind că măsura unghiului $\angle A$ este de 60° și perimetrul triunghiului este de 24 cm:

- Determinați natura triunghiului ABC .
- Calculați lungimea laturii BC .

Exercițiul 2. În triunghiul echilateral MNP , construim bisectoarea NA a unghiului $\angle N$ ($A \in MP$).

- Care este măsura unghiului $\angle MNA$?
- Ce măsură are unghiul $\angle NAM$?

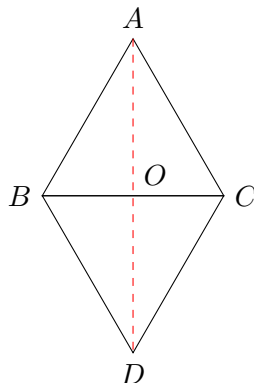
Exercițiul 3. Fie triunghiul echilateral ABC . Se construiește înălțimea AD ($D \in BC$).

- Care este măsura unghiului $\angle BAD$?
- Dacă perimetrul triunghiului ABC este de 60 cm, care este lungimea segmentului BD ?

Exercițiul 4. Laturile unui triunghi ABC sunt exprimate prin expresiile: $AB = 3x - 2$, $BC = x + 6$ și $AC = 2x + 2$. Determinați valoarea lui x știind că triunghiul este echilateral.

Exercițiul 5. Se construiesc două triunghiuri echilaterale ABC și DBC de o parte și de alta a laturii comune BC .

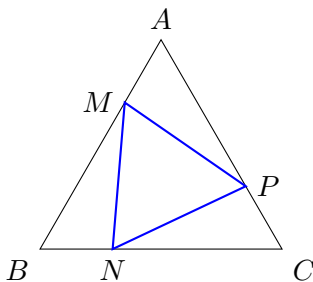
- Calculați măsura unghiului $\angle ABD$.
- Demonstrați că punctele A, O, D sunt coliniare (unde O este mijlocul lui BC) și că $AD \perp BC$.



Exercițiul 6. În triunghiul echilateral ABC , mediana AM și înălțimea BN se intersectează în punctul O . Dacă distanța de la O la vârful A este de 8 cm, calculați:

- Lungimea totală a mediane AM .
- Distanța de la O la latura AC .

Exercițiul 7. Fie triunghiul echilateral ABC . Pe laturile AB , BC și CA se consideră punctele M , N , respectiv P , astfel încât $AM \equiv BN \equiv CP$. Demonstrați că triunghiul MNP este echilateral.

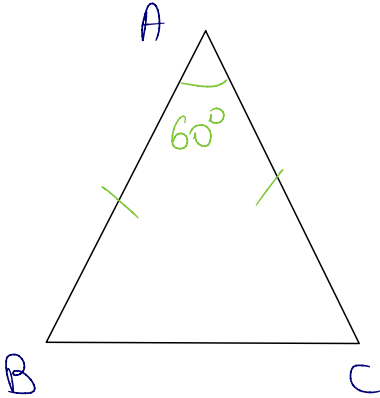


Exercițiul 8. Fie triunghiul echilateral ABC . În exteriorul triunghiului se construiește triunghiul isoscel ACD cu $AD = DC$ astfel încât măsura unghiului $\angle ADC = 120^\circ$. Demonstrați că dreapta BD este mediatoarea laturii AC . Calculați măsura unghiului $\angle DBC$.

Succes!

Exercițiul 1. Fie triunghiul isoscel ABC cu $AB = AC$. Știind că măsura unghiului $\angle A$ este de 60° și perimetrul triunghiului este de 24 cm:

- Determinați natura triunghiului ABC .
- Calculați lungimea laturii BC .



$$a) \triangle ABC \text{ isoscel } \left. \begin{array}{l} \hat{A} = 60^\circ \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle ABC \text{ echilateral}$$

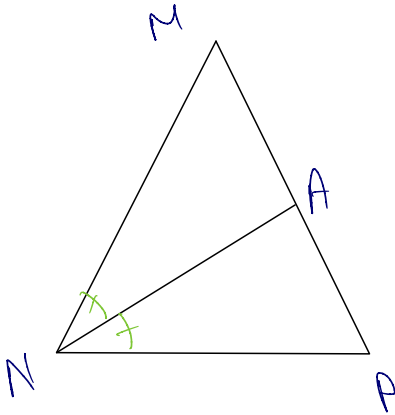
$$e) \triangle ABC \text{ echilateral} \Rightarrow AB = BC = AC = l$$

$$\Rightarrow P_{\triangle ABC} = 3 \cdot l = 24 \text{ cm} \Rightarrow 3l = 24 \text{ } / : 3 \Rightarrow l = 8 \text{ cm}$$

$$\Rightarrow BC = 8 \text{ cm}$$

Exercițiul 2. În triunghiul echilateral MNP , construim bisectoarea NA a unghiului $\angle N$ ($A \in MP$).

- Care este măsura unghiului $\angle MNA$?
- Ce măsură are unghiul $\angle NAM$?



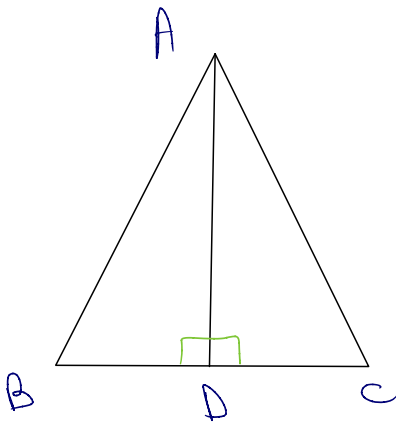
$$a) \triangle MNP \text{ echilateral} \Rightarrow \hat{MNP} = 60^\circ$$

$$[NA \text{ bis } \hat{MNP} \Rightarrow \hat{MNA} = \frac{\hat{MNP}}{2} = \frac{60^\circ}{2} = 30^\circ$$

$$b) [NA \text{ bis } \triangle MNP \text{ echilateral} \left. \begin{array}{l} \end{array} \right\} \Rightarrow NA \perp MP \Rightarrow \hat{NAM} = 90^\circ$$

Exercițiul 3. Fie triunghiul echilateral ABC . Se construiește înălțimea AD ($D \in BC$).

- Care este măsura unghiului $\angle BAD$?
- Dacă perimetrul triunghiului ABC este de 60 cm, care este lungimea segmentului BD ?



$$a) \triangle ABC \text{ echilateral} \left. \begin{array}{l} \end{array} \right\} \Rightarrow [AD \text{ bis } \hat{BAC} \Rightarrow AD \perp BC$$

$$\Rightarrow \hat{BAD} = \frac{\hat{BAC}}{2}$$

$$\triangle ABC \text{ echilateral} \Rightarrow \hat{BAC} = 60^\circ$$

$$\left. \begin{array}{l} \end{array} \right\} \Rightarrow \hat{BAD} = \frac{60^\circ}{2} = 30^\circ$$

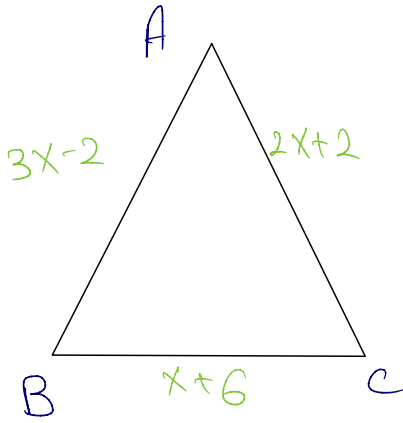
$$b) P_{\triangle ABC} = 3 \cdot l = 60 \text{ cm} \Rightarrow l = 60 : 3 = 20 \text{ cm}$$

$$\triangle ABC \text{ echilateral} \left. \begin{array}{l} \end{array} \right\} \Rightarrow AD \text{ mediană} \Rightarrow BD = DC = \frac{BC}{2}$$

$$AD \perp BC$$

$$\Rightarrow BD = \frac{20}{2} = 10 \text{ cm}$$

Exercițiul 4. Laturile unui triunghi ABC sunt exprimate prin expresiile: $AB = 3x - 2$, $BC = x + 6$ și $AC = 2x + 2$. Determinați valoarea lui x știind că triunghiul este echilateral.



Vom egala 2 laturi, și vom afla pe x și, apoi, îl înlocuim în toate cele trei laturi pentru verificare.

$$AB = AC \Rightarrow 3x - 2 = 2x + 2 \Rightarrow 3x - 2x = 2 + 2 \Rightarrow x = 4$$

$$AB = 3x - 2 = 3 \cdot 4 - 2 = 12 - 2 = 10 \text{ cm}$$

$$AC = 2x + 2 = 2 \cdot 4 + 2 = 8 + 2 = 10 \text{ cm}$$

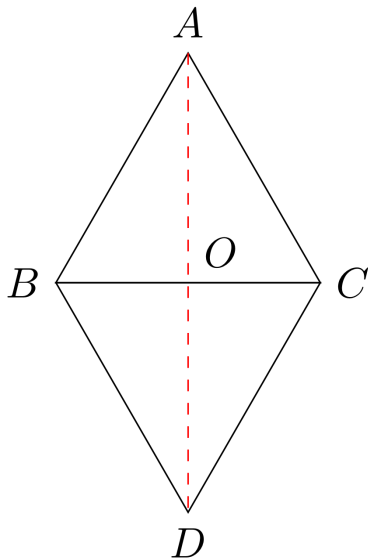
$$BC = x + 6 = 4 + 6 = 10 \text{ cm}$$

Adevărat, $x = 4$

Exercițiul 5. Se construiesc două triunghiuri echilaterale ABC și DBC de o parte și de alta a laturii comune BC .

(a) Calculați măsura unghiului $\angle ABD$.

(b) Demonstrați că punctele A, O, D sunt coliniare (unde O este mijlocul lui BC) și că $AD \perp BC$.



$$a) \triangle ABC \text{ echilateral} \Rightarrow \hat{ABC} = 60^\circ$$

$$\triangle DBC \text{ echilateral} \Rightarrow \hat{DBC} = 60^\circ$$

$$\hat{ABD} = \hat{ABC} + \hat{DBC} = 60^\circ + 60^\circ = 120^\circ$$

$$b) O \text{ mijlocul } [BC] \Rightarrow BO = OC \Rightarrow AO \text{ mediană în } \triangle ABC \\ \Rightarrow DO \text{ mediană în } \triangle DBC$$

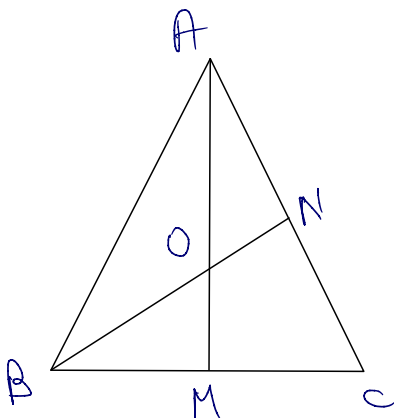
$$\triangle ABC, \triangle DBC \text{ echilaterale} \Rightarrow AO \perp BC \text{ și } DO \perp BC \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ punctele A, O, D coliniare și $AD \perp BC$ (deoarece printr-un punct se poate duce o unică perpendiculară)

Exercițiul 6. În triunghiul echilateral ABC , mediana AM și înălțimea BN se intersectează în punctul O . Dacă distanța de la O la vârful A este de 8 cm, calculați:

(a) Lungimea totală a medianei AM .

(b) Distanța de la O la latura AC .



$$a) \triangle ABC \text{ echilateral} \left. \begin{array}{l} \Rightarrow BN \text{ mediană} \\ BN \perp AC \\ AM \text{ mediană} \\ AM \cap BN = \{O\} \end{array} \right\} \Rightarrow O \text{ centru de greutate}$$

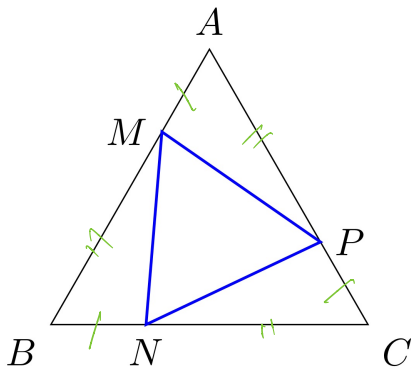
$$\Rightarrow AO = \frac{2}{3} \cdot AM \Rightarrow \frac{2}{3} \cdot AM = 8 / \cdot 3 \Rightarrow 2 \cdot AM = 24 / : 2 \Rightarrow AM = 12 \text{ cm}$$

$$b) ON \perp AC \Rightarrow d(O, AC) = ON$$

$$\triangle ABC \text{ echilateral} \Rightarrow AN = BN = 12 \text{ cm} \text{ (toate liniile}$$

$$\text{importante sunt egale)} \quad ON = \frac{1}{3} \cdot BN = \frac{1}{3} \cdot 12 = 4 \text{ cm}$$

Exercițiul 7. Fie triunghiul echilateral ABC . Pe laturile AB , BC și CA se consideră punctele M , N , respectiv P , astfel încât $AM \equiv BN \equiv CP$. Demonstrați că triunghiul MNP este echilateral.



$$\begin{aligned} \triangle ABC \text{ echilateral} &\Rightarrow AB = AC = BC \\ AP &= AC - CP \\ MB &= AB - AM \\ NC &= BC - BN \\ \text{din ipoteza: } AM &= BN = CP \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} \triangle ABC \text{ echilateral} &\Rightarrow AB = AC = BC \\ AP &= AC - CP \\ MB &= AB - AM \\ NC &= BC - BN \end{aligned}} \right\} \Rightarrow AP = BM = CN$$

din ipoteza: $AM = BN = CP$

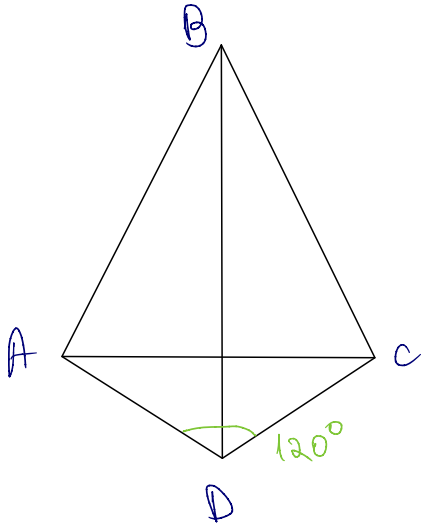
$$\triangle ABC \text{ echilateral} \Rightarrow \hat{A} = \hat{B} = \hat{C} = 60^\circ$$

$$\left. \begin{array}{l} \triangle AMP \\ \triangle BNM \end{array} \right\} \begin{array}{l} AM = BN \\ AP = BM \\ \hat{MAP} = \hat{MBN} (60^\circ) \end{array} \xRightarrow{\text{LUL}} \triangle AMP \equiv \triangle BNM \Rightarrow MP = NM$$

$$\left. \begin{array}{l} \triangle BNM \\ \triangle CPN \end{array} \right\} \begin{array}{l} BN = CP \\ BM = CN \\ \hat{MBN} = \hat{NCP} (60^\circ) \end{array} \xRightarrow{\text{LUL}} \triangle BNM \equiv \triangle CPN \Rightarrow NM = PN$$

$$\Rightarrow MP = NM = PN \Rightarrow \triangle MNP \text{ echilateral}$$

Exercițiul 8. Fie triunghiul echilateral ABC . În exteriorul triunghiului se construiește triunghiul isoscel ACD cu $AD = DC$ astfel încât măsura unghiului $\angle ADC = 120^\circ$. Demonstrați că dreapta BD este mediatoarea laturii AC . Calculați măsura unghiului $\angle DBC$.



$$\triangle ABC \text{ echilateral} \Rightarrow BA = BC \Rightarrow B \text{ egal depărtat de capetele segmentului } [AC] \Rightarrow B \text{ este pe mediatoarea lui } [AC] \quad (1)$$

$$\triangle DAC \text{ isoscel} \Rightarrow DA = DC \Rightarrow D \text{ egal depărtat de capetele segmentului } [AC] \Rightarrow D \text{ este pe mediatoarea lui } [AC] \quad (2)$$

$$\text{Din } (1) \text{ și } (2) \Rightarrow BD \text{ mediatoarea } [AC]$$

$$\left. \begin{array}{l} \triangle ABC \text{ echilateral} \\ BD \text{ mediatoare} \end{array} \right\} \Rightarrow [BD \text{ bis } \hat{ABC} \Rightarrow \hat{ABD} = \hat{DBC} = \frac{\hat{ABC}}{2} \left. \vphantom{\begin{array}{l} \triangle ABC \text{ echilateral} \\ BD \text{ mediatoare} \end{array}} \right\} \Rightarrow \hat{DBC} = \frac{60^\circ}{2} = 30^\circ$$

$$\triangle ABC \text{ echilateral} \Rightarrow \hat{ABC} = 60^\circ$$