

Lecția 1 – Proprietățile triunghiului isoscel

Clasa a 6-a – Capitolul 4 - Proprietățile și clasificarea triunghiurilor

Instrucțiuni

Reține proprietățile fundamentale:

- Un triunghi isoscel are două laturi congruente și unghiurile de la bază congruente.
- În triunghiul isoscel, bisectoarea unghiului din vârf este și înălțime, mediană și mediatore corespunzătoare bazei.

Durata recomandată: **50 minute**.

Exerciții

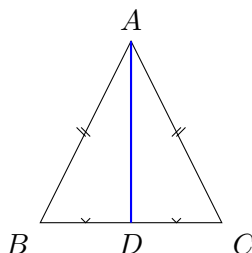
Exercițiul 1. Fie triunghiul isoscel ABC cu baza BC .

- Dacă $m(\angle A) = 40^\circ$, calculați măsura unghiului $\angle B$.
- Dacă $m(\angle B) = 70^\circ$, calculați măsura unghiului $\angle A$.

Exercițiul 2. Un triunghi isoscel are perimetrul egal cu 32 cm.

- Dacă baza are lungimea de 10 cm, aflați lungimea laturilor congruente.
- Dacă una dintre laturile congruente are lungimea de 12 cm, aflați lungimea bazei.

Exercițiul 3. În triunghiul isoscel ABC ($AB = AC$), construim mediana AD ($D \in BC$). Știind că perimetrul triunghiului ABC este 36 cm și perimetrul triunghiului ABD este 30 cm, calculați lungimea medianei AD .



Exercițiul 4. Fie triunghiul isoscel ABC cu baza BC . Măsura unghiului exterior din vârful B este de 130° . Calculați măsurile tuturor unghiurilor interioare ale triunghiului ABC .

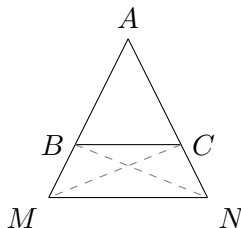
Exercițiul 5. Se dă triunghiul isoscel ABC cu baza BC . Știm că $AB = 2x + 5$ și $AC = 3x - 2$ (lungimile sunt în cm).

- (a) Aflați valoarea lui x și lungimile laturilor congruente.
- (b) Dacă baza BC este jumătate din lungimea lui AB , calculați perimetrul triunghiului.

Exercițiul 6. În triunghiul isoscel ABC ($AB = AC$), măsura unghiului $\angle A$ este de 50° . Se duce înălțimea $AD \perp BC$ ($D \in BC$). Calculați măsurile unghiurilor triunghiului ADC .

Exercițiul 7. Fie triunghiul isoscel ABC cu $AB = AC$. Se prelungesc laturile AB și AC cu segmentele congruente BM și CN ($B \in AM$, $C \in AN$) astfel încât $BM \equiv CN$. Demonstrați că:

- (a) $\triangle ABN \equiv \triangle ACM$.
- (b) Triunghiul AMN este isoscel.



Exercițiul 8. Fie triunghiul isoscel ABC cu $AB = AC$ și $m(\angle A) = 36^\circ$. Bisectoarea unghiului $\angle B$ intersectează latura AC în punctul D .

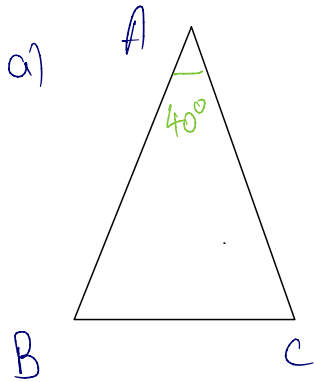
- (a) Calculați măsurile unghiurilor $\triangle ABC$.
- (b) Demonstrați că triunghiul BDC este isoscel.
- (c) Demonstrați că triunghiul ABD este isoscel.

Succes!

Exercițiul 1. Fie triunghiul isoscel ABC cu baza BC .

(a) Dacă $m(\angle A) = 40^\circ$, calculați măsura unghiului $\angle B$.

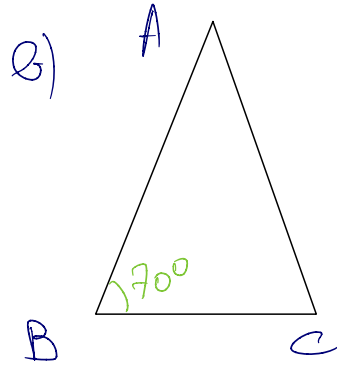
(b) Dacă $m(\angle B) = 70^\circ$, calculați măsura unghiului $\angle A$.



$$\begin{aligned} \triangle ABC \text{ isoscel} &\Rightarrow \hat{B} = \hat{C} \\ \text{În } \triangle ABC: \hat{A} + \hat{B} + \hat{C} &= 180^\circ \end{aligned} \left. \vphantom{\begin{aligned} \triangle ABC \text{ isoscel} &\Rightarrow \hat{B} = \hat{C} \\ \text{În } \triangle ABC: \hat{A} + \hat{B} + \hat{C} &= 180^\circ \end{aligned}} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 40^\circ + 2 \cdot \hat{B} = 180^\circ \quad | -40^\circ$$

$$2 \cdot \hat{B} = 140^\circ \quad | :2 \Rightarrow \hat{B} = 70^\circ$$



$$\begin{aligned} \triangle ABC \text{ isoscel} &\Rightarrow \hat{B} = \hat{C} = 70^\circ \\ \text{În } \triangle ABC: \hat{A} + \hat{B} + \hat{C} &= 180^\circ \end{aligned} \left. \vphantom{\begin{aligned} \triangle ABC \text{ isoscel} &\Rightarrow \hat{B} = \hat{C} = 70^\circ \\ \text{În } \triangle ABC: \hat{A} + \hat{B} + \hat{C} &= 180^\circ \end{aligned}} \right\} \Rightarrow$$

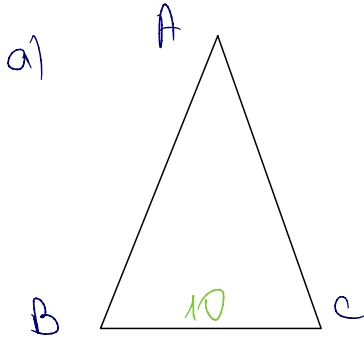
$$\Rightarrow \hat{A} + 2 \cdot 70^\circ = 180^\circ \Rightarrow \hat{A} + 140^\circ = 180^\circ$$

$$\hat{A} = 180^\circ - 140^\circ = 40^\circ$$

Exercițiul 2. Un triunghi isoscel are perimetrul egal cu 32 cm.

(a) Dacă baza are lungimea de 10 cm, aflați lungimea laturilor congruente.

(b) Dacă una dintre laturile congruente are lungimea de 12 cm, aflați lungimea bazei.



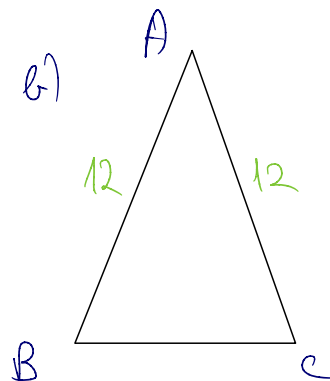
$$\begin{aligned} \triangle ABC \text{ isoscel, } BC &= 10 \text{ cm} \\ P_{\triangle ABC} = AB + AC + BC &= 32 \text{ cm} \end{aligned} \left. \vphantom{\begin{aligned} \triangle ABC \text{ isoscel, } BC &= 10 \text{ cm} \\ P_{\triangle ABC} = AB + AC + BC &= 32 \text{ cm} \end{aligned}} \right\} \Rightarrow$$

$$AB = AC$$

$$\Rightarrow 2 \cdot AB + 10 = 32 \quad | -10$$

$$2 \cdot AB = 22 \quad | :2$$

$$AB = 11 \text{ cm} = AC$$

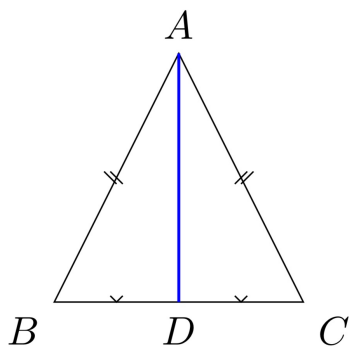


$$\begin{aligned} \triangle ABC \text{ isoscel} &\Rightarrow AB = AC = 12 \text{ cm} \\ P_{\triangle ABC} = AB + AC + BC &= 32 \text{ cm} \end{aligned} \left. \vphantom{\begin{aligned} \triangle ABC \text{ isoscel} &\Rightarrow AB = AC = 12 \text{ cm} \\ P_{\triangle ABC} = AB + AC + BC &= 32 \text{ cm} \end{aligned}} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 12 + 12 + BC = 32 \Rightarrow 24 + BC = 32 \quad | -24$$

$$BC = 8 \text{ cm}$$

Exercițiul 3. În triunghiul isoscel ABC ($AB = AC$), construim mediana AD ($D \in BC$). Știind că perimetrul triunghiului ABC este 36 cm și perimetrul triunghiului ABD este 30 cm, calculați lungimea medianei AD .



$$P_{\triangle ABC} = 36 \text{ cm} \Rightarrow AB + AC + BC = 36$$

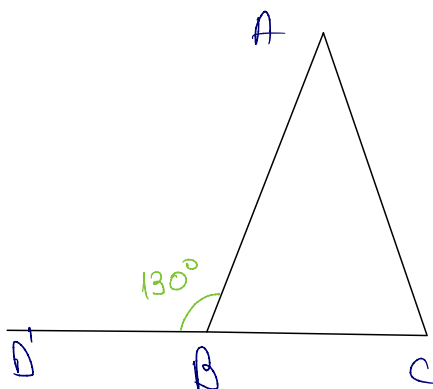
$$P_{\triangle ABD} = 30 \text{ cm} \Rightarrow AB + AD + BD = 30$$

$$\triangle ABC \text{ isoscel} \Rightarrow AB = AC \Rightarrow 2 \cdot AB + BC = 36$$

$$\left. \begin{array}{l} AD \text{ mediană} \Rightarrow BD = DC = \frac{BC}{2} \Rightarrow AB + AD + \frac{BC}{2} = 30 \\ 2 \cdot AB + BC = 36 \quad | :2 \Rightarrow AB + \frac{BC}{2} = 18 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 18 + AD = 30 \quad | -18 \Rightarrow AD = 12 \text{ cm}$$

Exercițiul 4. Fie triunghiul isoscel ABC cu baza BC . Măsura unghiului exterior din vârful B este de 130° . Calculați măsurile tuturor unghiurilor interioare ale triunghiului ABC .



$$\angle ABD = 130^\circ \text{ exterior} \Rightarrow \angle ABC = 180^\circ - 130^\circ = 50^\circ$$

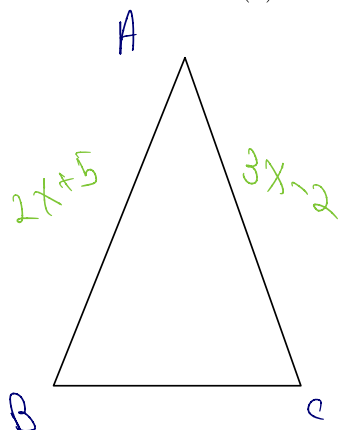
$$\triangle ABC \text{ isoscel} \Rightarrow \hat{A}BC = \hat{A}CB = 50^\circ \quad \left. \begin{array}{l} \text{În } \triangle ABC: \hat{A}BC + \hat{A}CB + \hat{B}AC = 180^\circ \\ \Rightarrow 100^\circ + \hat{B}AC = 180^\circ \quad | -100^\circ \Rightarrow \hat{B}AC = 80^\circ \end{array} \right\} \Rightarrow 2 \cdot 50^\circ + \hat{B}AC = 180^\circ$$

$$\Rightarrow 100^\circ + \hat{B}AC = 180^\circ \quad | -100^\circ \Rightarrow \hat{B}AC = 80^\circ$$

Exercițiul 5. Se dă triunghiul isoscel ABC cu baza BC . Știm că $AB = 2x + 5$ și $AC = 3x - 2$ (lungimile sunt în cm).

(a) Aflați valoarea lui x și lungimile laturilor congruente.

(b) Dacă baza BC este jumătate din lungimea lui AB , calculați perimetrul triunghiului.



$$a) \triangle ABC \text{ isoscel} \Rightarrow AB = AC \Rightarrow 2x + 5 = 3x - 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2x - 3x = -2 - 5 \Rightarrow -x = -7 \quad | \cdot (-1) \Rightarrow x = 7$$

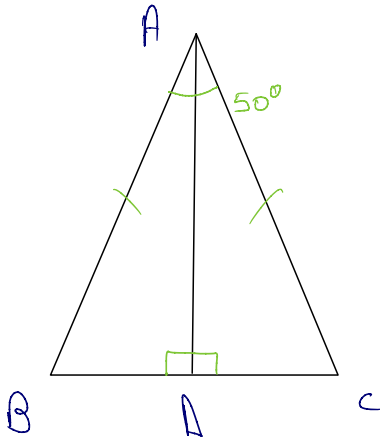
$$AB = 2 \cdot 7 + 5 = 14 + 5 = 19 \text{ cm}$$

$$AC = 3 \cdot 7 - 2 = 21 - 2 = 19 \text{ cm}$$

$$b) BC = \frac{AB}{2} = \frac{19}{2} = 9,5 \text{ cm}$$

$$P_{\triangle ABC} = AB + AC + BC = 19 + 19 + 9,5 = 47,5 \text{ cm}$$

Exercițiul 6. În triunghiul isoscel ABC ($AB = AC$), măsura unghiului $\angle A$ este de 50° . Se duce înălțimea $AD \perp BC$ ($D \in BC$). Calculați măsurile unghiurilor triunghiului ADC .

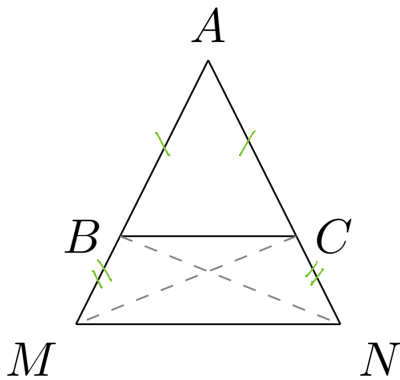


$$\begin{aligned} \triangle ABC \text{ isoscel } \left. \begin{array}{l} AD \perp BC \\ AD \text{ bis } \widehat{BAC} \end{array} \right\} &\Rightarrow \widehat{BAD} = \widehat{CAD} = \frac{\widehat{BAC}}{2} = \frac{50^\circ}{2} = 25^\circ \\ AD &\perp BC \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} AD \perp BC &\Rightarrow \widehat{ADC} = 90^\circ \\ \text{În } \triangle ADC: \widehat{ADC} + \widehat{CAD} + \widehat{ACD} &= 180^\circ \Rightarrow 90^\circ + 25^\circ + \widehat{ACD} = 180^\circ \\ \Rightarrow 115^\circ + \widehat{ACD} &= 180^\circ \Rightarrow \widehat{ACD} = 180^\circ - 115^\circ = 65^\circ \end{aligned}$$

Exercițiul 7. Fie triunghiul isoscel ABC cu $AB = AC$. Se prelungește laturile AB și AC cu segmentele congruente BM și CN ($B \in AM$, $C \in AN$) astfel încât $BM \equiv CN$. Demonstrați că:

- (a) $\triangle ABN \equiv \triangle ACM$.
(b) Triunghiul AMN este isoscel.



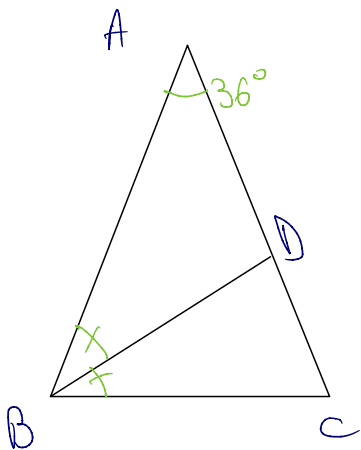
$$\begin{aligned} a) \quad &AM = AB + BM \\ &AN = AC + CN \\ &AB = AC \\ &BM = CN \end{aligned} \left. \right\} \Rightarrow AM = AN$$

$$\begin{aligned} \triangle ABN &| AB = AC \\ \triangle ACM &| \angle A \text{ unghi comun} \\ &AN = AM \end{aligned} \left. \right\} \xRightarrow{\text{LUL}} \triangle ABN \equiv \triangle ACM$$

b) De la subpunctul a) avem $AM = AN \Rightarrow \triangle AMN$ isoscel

Exercițiul 8. Fie triunghiul isoscel ABC cu $AB = AC$ și $m(\angle A) = 36^\circ$. Bisectoarea unghiului $\angle B$ intersectează latura AC în punctul D .

- (a) Calculați măsurile unghiurilor $\triangle ABC$.
(b) Demonstrați că triunghiul BDC este isoscel.
(c) Demonstrați că triunghiul ABD este isoscel.



$$\begin{aligned} a) \quad &\triangle ABC \text{ isoscel } \Rightarrow \widehat{ABC} = \widehat{ACB} \\ \text{În } \triangle ABC: \widehat{ABC} + \widehat{ACB} + \widehat{BAC} &= 180^\circ \left. \begin{array}{l} \Rightarrow 2 \cdot \widehat{ABC} + 36^\circ = 180^\circ \\ 2 \cdot \widehat{ABC} = 144^\circ / 2 \Rightarrow \end{array} \right\} \\ \Rightarrow \widehat{ABC} = 72^\circ &= \widehat{ACB} \end{aligned}$$

$$b) \quad BD \text{ bis } \widehat{ABC} \Rightarrow \widehat{ABD} = \widehat{DBC} = \frac{\widehat{ABC}}{2} = \frac{72^\circ}{2} = 36^\circ$$

$$\text{În } \triangle BDC: \widehat{BDC} + \widehat{DBC} + \widehat{BCD} = 180^\circ \Rightarrow \widehat{BDC} + 36^\circ + 72^\circ = 180^\circ$$

$$\Rightarrow \widehat{BDC} + 108^\circ = 180^\circ \Rightarrow \widehat{BDC} = 72^\circ \left. \begin{array}{l} \Rightarrow \widehat{BDC} = \widehat{BCD} = 72^\circ \\ \Rightarrow \triangle BDC \text{ isoscel} \end{array} \right\}$$

$$c) \quad \text{În } \triangle ABD: \widehat{ABD} = 36^\circ \left. \begin{array}{l} \widehat{BAD} = 36^\circ \end{array} \right\} \Rightarrow \widehat{ABD} = \widehat{BAD} \Rightarrow \triangle ABD \text{ isoscel}$$

