

Rezolvare - Fișă de lucru

Ecuatii și probleme în mulțimea numerelor raționale

Clasa a 6-a – Recapitulare lecțiile 7–8

Exerciții

Exercițiul 1. Rezolvă în Q :

(a) $x + 5 = 9$

(b) $7 - x = 3$

(c) $-x + 2 = -2$

(d) $x + \frac{1}{2} = -\frac{3}{4}$

Rezolvare:

(a) $x + 5 = 9 \mid -5 \Rightarrow x = 9 - 5 = 4.$ (b)

$7 - x = 3 \Rightarrow -x = 3 - 7 = -4 \Rightarrow x = 4.$

(c) $-x + 2 = -2 \Rightarrow -x = -4 \Rightarrow x = 4.$ (d)

$x + \frac{1}{2} = -\frac{3}{4} \mid -\frac{1}{2} \Rightarrow x = -\frac{3}{4} - \frac{1}{2} = -\frac{3}{4} - \frac{2}{4} = -\frac{5}{4}.$

Exercițiul 2. Rezolvă în Q :

(a) $(x + 5)^2 = 4$

(b) $(2x + 3) - 3 = 5$

(c) $(y - 3)^2 + 5 = 7$

(d) $-7(x + 3) = 5(x + 3) - 6$

Rezolvare:

(a) $(x + 5)^2 = 4 \Rightarrow x + 5 = \pm 2 \Rightarrow x = -3 \text{ sau } x = -7.$

(b) $(2x + 3) - 3 = 5 \Rightarrow 2x = 5 \Rightarrow x = \frac{5}{2}.$

(c) $(y - 3)^2 + 5 = 7 \Rightarrow (y - 3)^2 = 2.$ *Numerele $3 \pm \sqrt{2}$ nu sunt în $Q \Rightarrow$ fără soluții în Q .*

(d) $-7(x + 3) = 5(x + 3) - 6 \Rightarrow -12(x + 3) = -6 \Rightarrow x + 3 = \frac{1}{2} \Rightarrow x = -\frac{5}{2}.$

Exercițiul 3. Rezolvă ecuațiile:

(a) $(x + 2)^2 = (2x - 2)^2$

(b) $2x + \frac{4}{x} = x$

Rezolvare:

(a) $(x + 2)^2 = (2x - 2)^2 \Rightarrow x + 2 = 2x - 2$ sau $x + 2 = -(2x - 2)$.

Prima: $x + 2 = 2x - 2 \Rightarrow x = 4$. *A doua:*

$x + 2 = -2x + 2 \Rightarrow 3x = 0 \Rightarrow x = 0$.

Soluții: $x \in \{0, 4\}$.

(b) $2x + \frac{4}{x} = x, x \neq 0 \Rightarrow$ înmulțim cu x : $2x^2 + 4 = x^2 \Rightarrow x^2 + 4 = 0$.

Fără soluții reale (deci nici în $\mathbb{Q}$).

Exercițiul 4. Rezolvă în $\mathbb{Q}$:

(a) $2(x - 3) + 8(2x - 3) = 24 - 5(x + 3)$

(b) $18(1 - 2x) - 3(x + 6) = 7(x + 1) - 2x - 5$

Rezolvare:

(a) $2x - 6 + 16x - 24 = 24 - 5x - 15 \Rightarrow 18x - 30 = 9 - 5x$

$\Rightarrow 23x = 39 \Rightarrow x = \frac{39}{23}$.

(b) $18 - 36x - 3x - 18 = 7x + 7 - 2x - 5 \Rightarrow -39x = 5x + 2$

$\Rightarrow -44x = 2 \Rightarrow x = -\frac{1}{22}$.

Exercițiul 5. Rezolvă ecuațiile:

(a) $|x - 2| - |x| + 9 = 0$

(b) $12x - 5|x| = 21$

(c) $(x + 3)^2 = (2x - 5)^2$

Rezolvare:

(a) $|x - 2| - |x| + 9 = 0$ - analiză pe cazuri după poziția lui x :

Caz 1: $x \geq 2$. Atunci $|x - 2| = x - 2$ și $|x| = x$.

$(x - 2) - x + 9 = 7 \neq 0 \Rightarrow$ fără soluții în acest caz.

Caz 2: $0 \leq x < 2$. Atunci $|x - 2| = 2 - x$ și $|x| = x$.

$$(2 - x) - x + 9 = 11 - 2x = 0 \Rightarrow x = \frac{11}{2} = 5,5, \text{ dar } 5,5 \notin [0, 2) \Rightarrow \text{respins.}$$

Caz 3: $x < 0$. Atunci $|x - 2| = 2 - x$ și $|x| = -x$.

$$(2 - x) - (-x) + 9 = 11 \neq 0 \Rightarrow \text{fără soluții.}$$

Concluzie: ecuația nu are soluții reale (deci nici în Q).

(b) $12x - 5|x| = 21$ - două cazuri după semnul lui x :

Caz 1: $x \geq 0$. $|x| = x$.

$$12x - 5x = 21 \Rightarrow 7x = 21 \Rightarrow x = 3 \text{ (valid, } x \geq 0).$$

Caz 2: $x < 0$. $|x| = -x$.

$$12x - 5(-x) = 21 \Rightarrow 12x + 5x = 21 \Rightarrow 17x = 21 \Rightarrow x = \frac{21}{17} > 0,$$

contradicție cu $x < 0 \Rightarrow$ cazul se respinge.

Soluție: $x = 3$.

(c) $(x + 3)^2 = (2x - 5)^2$ - egalitatea pătratelor:

$$\begin{aligned} (x + 3)^2 &= (2x - 5)^2 \iff |x + 3| = |2x - 5| \\ \iff \begin{cases} x + 3 = 2x - 5 & \Rightarrow x = 8, \\ x + 3 = -(2x - 5) & \Rightarrow x + 3 = -2x + 5 \Rightarrow 3x = 2 \Rightarrow x = \frac{2}{3}. \end{cases} \end{aligned}$$

Soluții: $x \in \left\{ 8, \frac{2}{3} \right\}$.

Exercițiul 6. Un obiect s-a ieftinit cu 10%, apoi s-a scumpit cu 10%. După scumpire, costă 261,36 lei. Află prețul inițial.

Rezolvare:

Fie P_i prețul inițial.

$$\text{După ieftinire cu 10\%: } P_1 = \left(1 - \frac{10}{100}\right) P_i = \frac{90}{100} P_i.$$

$$\text{După scumpire cu 10\%: } P_f = \left(1 + \frac{10}{100}\right) P_1 = \frac{110}{100} \cdot \frac{90}{100} P_i = \frac{99}{100} P_i.$$

$$\frac{99}{100} P_i = 261,36 \implies P_i = 261,36 \cdot \frac{100}{99} = 264.$$

Răspuns: $P_i = 264$ lei.

Exercițiul 7. După două scumpiri succesive, prima de 5% și a doua de 15%, un obiect ajunge să coste 195,5 lei. Află prețul inițial.

Rezolvare:

Fie P_i prețul inițial.

$$\text{Factor total de scumpire: } \frac{105}{100} \cdot \frac{115}{100} = \frac{12075}{10000} = \frac{483}{400}.$$

$$\Rightarrow P_f = \frac{483}{400} P_i \quad \Rightarrow \quad P_i = P_f \cdot \frac{400}{483}.$$

$$P_f = 195,5 = \frac{391}{2} \quad \Rightarrow \quad P_i = \frac{391}{2} \cdot \frac{400}{483} = \frac{391 \cdot 200}{483} = \frac{78\,200}{483} \approx 161,904 \dots$$

Răspuns aproximativ: $P_i \approx 161,90$ lei. (Exact: $\frac{78\,200}{483}$ lei)

Exercițiul 8. Media aritmetică a două numere raționale pozitive este 7,5, iar raportul lor este 0,6. Află cele două numere.

Rezolvare:

Fie numerele a și b (pozitive), cu $\frac{a+b}{2} = 7,5 \Rightarrow a+b = 15$ și

$$\frac{a}{b} = 0,6 = \frac{3}{5} \Rightarrow a = \frac{3}{5}b.$$

$$\frac{3}{5}b + b = 15 \Rightarrow \frac{8}{5}b = 15 \Rightarrow b = 15 \cdot \frac{5}{8} = \frac{75}{8} = 9,375.$$

$$a = \frac{3}{5} \cdot \frac{75}{8} = \frac{45}{8} = 5,625.$$

Răspuns: $a = \frac{45}{8}$, $b = \frac{75}{8}$.

Exercițiul 9. Un robinet umple un bazin în 3 ore, iar altul în 6 ore. În câte ore vor umple bazinul împreună?

Rezolvare:

Debite: $\frac{1}{3}$ bazin/oră și $\frac{1}{6}$ bazin/oră. Împreună: $\frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$ bazin/oră.

*Timpul: $t = \frac{1}{1/2} = 2$ ore. **Răspuns:** 2 ore.*