

Lecția 8 - Cercul. Poziții relative

Clasa a 6-a – Capitolul Geometrie

Instrucțiuni

Rezolvă exercițiile folosind definițiile elementelor cercului (rază, coardă, diametru, arc), relația dintre distanța de la centru și poziția dreptei, și pozițiile relative a două cercuri. Durata recomandată: **50 de minute**.

Exerciții

Exercițiul 1. Se consideră un cerc $\mathcal{C}(O, r)$ cu raza $r = 4$ cm. Se dau punctele A, B, C situate la distanțele $OA = 2,5$ cm, $OB = 4$ cm și $OC = 5$ cm de centrul O .

- Precizați poziția fiecărui punct față de cerc (interior, exterior sau pe cerc).
- Desenați cercul și punctele conform datelor.

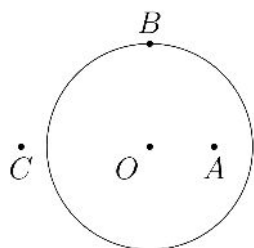
a)

Punctul A este în interiorul cercului, deoarece $OA < r$ ($2,5 < 4$)

Punctul B este pe cerc, deoarece $OB = r$ ($4 = 4$)

Punctul C este în exteriorul cercului, deoarece $OC > r$ ($5 > 4$)

b)

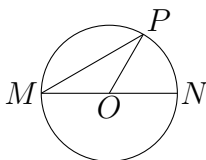


Exercițiul 2. Desenați un cerc de centru O și rază $r = 3$ cm. Luați un punct M pe cerc.

- Construiți punctul N diametral opus lui M . Ce lungime are segmentul MN ?
- Dacă P este un alt punct pe cerc astfel încât $m(\angle MOP) = 60^\circ$, ce fel de triunghi este $\triangle MOP$?

a)

N -diametral opus lui $M \Rightarrow$
 $\Rightarrow MN$ -diametru



$$MN = 2r = 2 \cdot 3 = 6 \text{ cm}$$

b)

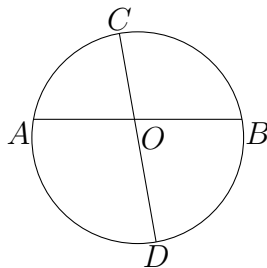
$\triangle MOP$: OM, OP -raze $\Rightarrow OM = OP = r = 3 \text{ cm} \Rightarrow \triangle MOP$ -isoscel

Un triunghi isoscel cu un unghi de 60° este echilateral.

$\triangle MOP$ -isoscel $\wedge m(\angle MOP) = 60^\circ \Rightarrow \triangle MOP$ -echilateral

Exercițiul 3. În figura alăturată este reprezentat un cerc de centru O .

- Numiți o coardă care nu este diametru.
- Numiți un diametru.
- Numiți un arc mic și un arc mare determinate de punctele A și B .



a) AB -coardă, dar nu este diametru

b)

CD -diametru

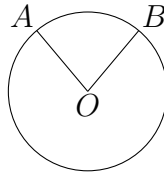
c) Arce determinate de A și B :

- arcul mic $\widehat{AB}$
- arcul mare $\widehat{ACB}$

Exercițiul 4. Măsura arcului mic $\widehat{AB}$ este de 80° .

(a) Care este măsura unghiului la centru $\angle AOB$?

(b) Care este măsura arcului mare $\widehat{AB}$?



a) Măsura unghiului la centru este egală cu măsura arcului mic cuprins între laturile sale.
 $m(\angle AOB) = m(\widehat{AB}_{\text{mic}}) = 80^\circ$

b)

Suma măsurilor arcului mic și ale arcului mare cu același capete este $360^\circ \Rightarrow m(\widehat{AB}_{\text{mare}}) = 360^\circ - 80^\circ = 280^\circ$

Exercițiul 5. Se dă un cerc $\mathcal{C}(O, r)$ cu $r = 6$ cm. Stabiliți poziția dreptei d față de cerc dacă distanța de la centrul O la dreapta d , notată $d(O, d)$, este:

(a) $d(O, d) = 4$ cm;

(b) $d(O, d) = 6$ cm;

(c) $d(O, d) = 8$ cm.

a)

$$d(O, d) = 4 \text{ cm}$$

$4 < r = 6 \Rightarrow$ dreapta este secantă cercului

b)

$$d(O, d) = 6 \text{ cm}$$

$6 = r = 6 \text{ cm} \Rightarrow$ dreapta este tangentă cercului

c)

$$d(O, d) = 8 \text{ cm}$$

$8 > r = 6 \text{ cm} \Rightarrow$ dreapta este exterioară cercului

Exercițiul 6. Se consideră două cercuri $C_1(O_1, R_1)$ și $C_2(O_2, R_2)$. Știind că $R_1 = 5$ cm și $R_2 = 3$ cm, stabiliți poziția relativă a celor două cercuri dacă distanța dintre centre O_1O_2 este:

- (a) $O_1O_2 = 8$ cm;
- (b) $O_1O_2 = 10$ cm;
- (c) $O_1O_2 = 2$ cm;
- (d) $O_1O_2 = 0$ cm.

Suma razelor $R_1 + R_2 = 5 + 3 = 8$
 Diferența razelor $R_1 - R_2 = 5 - 3 = 2$

- a) $O_1O_2 = 8$ cm
 $d = R_1 + R_2 \Rightarrow$ cercurile sunt tangente exterioare
- b) $O_1O_2 = 10$ cm $\Rightarrow d > (R_1 + R_2) \Rightarrow$ cercurile sunt exterioare
- c) $O_1O_2 = 2$ cm $\Rightarrow d = R_1 - R_2 \Rightarrow$ cercurile sunt tangente interioare
- d) $O_1O_2 = 0$ cm $\Rightarrow$ cercurile sunt concentrice

Exercițiul 7. Fie două cercuri $C_1(O_1, r)$ și $C_2(O_2, 3)$. Știind că raza primului cerc este $r = x + 2$ (unde $x > 0$), iar distanța dintre centre este $O_1O_2 = 7$ cm.

- (a) Pentru ce valoare a lui x cercurile sunt tangente exterioare?
- (b) Pentru ce valoare a lui x cercurile sunt tangente interioare?

a)

Tangente exterioare:

$$r_1 + r_2 = O_1O_2$$

$$r_1 = x + 2, r_2 = 3 \text{ cm}, O_1O_2 = 7 \text{ cm}$$

$$x + 2 + 3 = 7$$

$$x + 5 = 7 \quad | -5 \Rightarrow x = 2$$

b)

Tangente interioare:

$$|r_1 - r_2| = O_1O_2$$

4

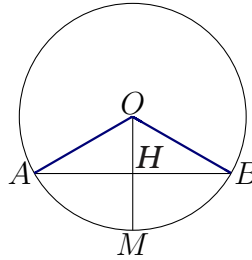
Presupunem $r_1 > r_2 \Rightarrow r_1 - r_2 = O_1O_2$

$$x + 2 - 3 = 7 \Rightarrow x - 1 = 7 \quad | +1$$

$$x = 8$$

Exercițiul 8. Se consideră un cerc de centru O și o coardă AB . Fie M mijlocul arcului mic $\widehat{AB}$.

- (a) Demonstrați că dreapta OM este mediatoarea coardei AB .
 (b) Dacă raza cercului este $R = 10$ cm și distanța de la centru la coardă este de 6 cm, aflați lungimea coardei AB .



a)

$\triangle AOB$:

OA, OB - raze $\Rightarrow OA = OB \Rightarrow \triangle AOB$ - isoscel

M - mijlocul arcului mic $\widehat{AB} \Rightarrow m(\angle AOM) = m(\angle BOM) \Rightarrow$
 $\Rightarrow OM$ - bisectoarea $\angle$ -ului de la vârf

Într-un triunghi isoscel, bisectoarea unui unghi este și înălțime și mediană.

$\left. \begin{array}{l} OM - \text{bisectoarea } \angle AOB \\ \triangle AOB - \text{isoscel} \end{array} \right\} \Rightarrow OM \perp AB \text{ și } M - \text{mijlocul lui } AB \Rightarrow$
 $\Rightarrow OM - \text{mediatoarea coardei } AB$

b)

Fie $\{H\} = OM \cap AB$

Distanța de la centru la coardă este $OH = 6$ cm $\Rightarrow OH \perp AB$

$\left. \begin{array}{l} \triangle AOB - \text{isoscel} \\ OH - \text{înălțime} \end{array} \right\} \Rightarrow OH - \text{mediană} \Rightarrow H - \text{mijlocul lui } AB \Rightarrow AB = 2AH$

$\triangle AOH$:

$OA = 10$ cm - multiplu de 5 $\Rightarrow OA = 5 \cdot 2$ } $\Rightarrow AH = 4 \cdot 2 = 8$ cm
 $OH = 6$ cm - multiplu de 3 $\Rightarrow OH = 3 \cdot 2$ }

Triunghiul egiptean are laturile proporționale cu 3, 4, 5.

$AB = 2AH = 2 \cdot 8 = 16$ cm