

Lecția 7 - Drepte perpendiculare. Axioma paralelelor și criterii de paralelism

Clasa a 6-a – Capitolul Geometrie

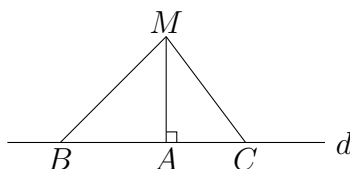
Instrucțiuni

Rezolvă exercițiile folosind definiția dreptelor perpendiculare (formează un unghi de 90°), distanța de la un punct la o dreaptă (lungimea perpendicularei) și mediatoarea unui segment. Durata recomandată: **50 de minute**.

Exerciții

Exercițiul 1. Fie dreapta d și punctul M exterior ei. Se construiesc $MA \perp d$ ($A \in d$) și punctele $B, C \in d$ astfel încât A este între B și C .

- (a) Comparați lungimea segmentului MA cu lungimea segmentului MB .
- (b) Care segment reprezintă distanța de la punctul M la dreapta d ?



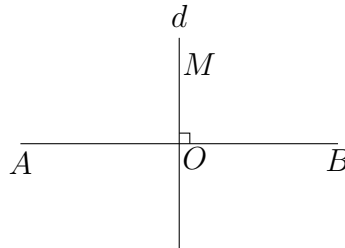
- a) $\triangle MAB$: $m(\angle A) = 90^\circ \Rightarrow MB$ - ipotenuză, MA - catetă
Obs.: Într-un triunghi dreptunghic, ipotenusa $>$ cateta.
 Deci, $MA < MB$

- b) Distanța de la un punct la o dreaptă este lungimea perpendicularei duse din ¹ acel punct pe dreaptă.
 $AM \perp d \Rightarrow AM$ este segmentul

Exercițiul 2. Desenați un segment AB cu lungimea de 6 cm. Construiți mediatoarea acestui segment și notați-o cu d . Fie M un punct pe dreapta d .

(a) Ce măsură are unghiul format de dreapta d cu dreapta AB ?

(b) Dacă O este mijlocul lui AB , calculați lungimea segmentului AO .



a)

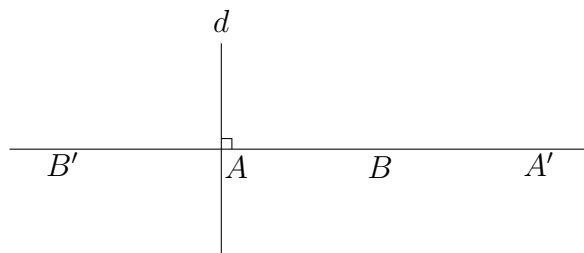
Mediatoarea este dreapta perpendiculară pe un segment în mijlocul acestuia.

Unghiul format de dreapta d cu AB are 90° .

b)

O - mijlocul lui $AB \Rightarrow AO = OB = \frac{AB}{2} = \frac{6}{2} = 3 \text{ cm}$

Exercițiul 3. Fie punctele A și B distincte. Construiți simetricul punctului A față de punctul B și notați-l cu A' . Construiți simetricul punctului B față de o dreaptă d care trece prin A și este perpendiculară pe AB , notat cu B' .



Simetricul lui A față de B : $A' \in AB$, a. i. B - mijlocul lui AA'

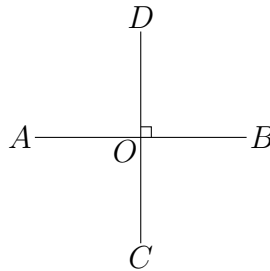
Simetricul lui B față de dreapta d :

$d \perp AB \Rightarrow AB \perp d$

Simetricul lui B este B' față de AB , a. i. A - mijlocul lui BB'

Exercițiul 4. Se consideră două drepte concurente AB și CD care se intersectează în punctul O . Știind că suma măsurilor a două unghiuri neadiacente (opuse la vârf) este 180° :

- Aflați măsura fiecărui unghi.
- Stabiliți poziția relativă a dreptelor AB și CD .



a)

$$AB \cap CD = \{O\}$$

$$\angle AOC, \angle BOD - \text{opuse la vârf} \Rightarrow m(\angle AOC) = m(\angle BOD)$$

$$m(\angle AOC) + m(\angle BOD) = 180^\circ \Rightarrow 2m(\angle AOC) = 180^\circ : 2 \Rightarrow m(\angle AOC) = 90^\circ$$

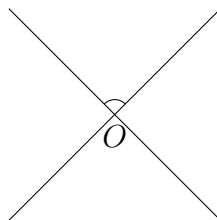
$$m(\angle AOC) + m(\angle BOC) = 180^\circ \Rightarrow m(\angle BOC) = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$$

$$m(\angle AOD) + \underbrace{m(\angle BOD)}_{90^\circ} = 180^\circ \Rightarrow m(\angle AOD) = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$$

b) Deoarece dreptele concurente formează un $\angle$ de $90^\circ \Rightarrow AB \perp CD$ (drepte $\perp$)

Exercițiul 5. Două drepte concurente formează patru unghiuri în jurul punctului de intersecție. Dacă diferența măsurilor a două unghiuri adiacente este 0° (sunt egale):

- Calculați măsura fiecărui unghi.
- Sunt cele două drepte perpendiculare? Justificați.



a) Fie x și y măsurile a două unghiuri adiacente.

$$x - y = 0 \Rightarrow x = y$$

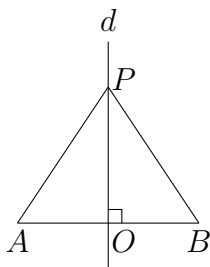
$$x, y - \text{adiacente} \Rightarrow x, y - \text{suplementare}$$

$$\begin{aligned} x + y &= 180^\circ \\ x &= y \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} 2x &= 180^\circ : 2 \\ x &= 90^\circ \end{aligned}$$

b) Dreptele sunt $\perp$, deoarece formează între ele 90° .

Exercițiul 6. Fie segmentul AB și mediatoarea sa d . Un punct P aparține mediatoarei d .

- Demonstrați că triunghiul PAB este isoscel.
- Dacă perimetrul triunghiului PAB este 20 cm și $AB = 6$ cm, calculați lungimea segmentului PA .

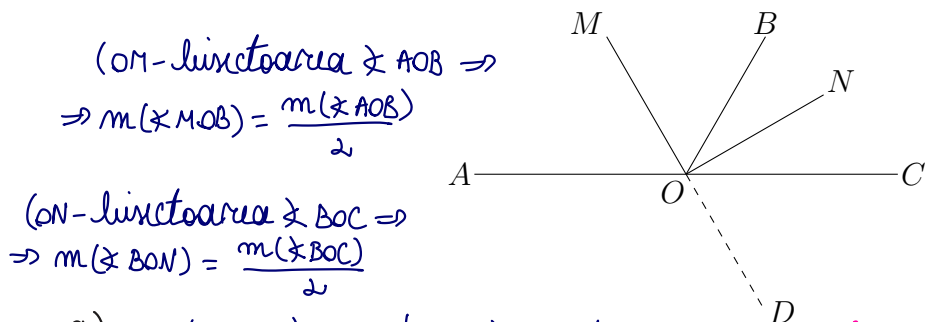


a) Orice punct de pe mediatoarea unui segment este egal depărtat de capetele segmentului.
Deci, $PA = PB \Rightarrow \triangle PAB$ - isoscel.

b) $P_{PAB} = PA + AB + PB \Rightarrow 2PA = P_{PAB} - AB = 20 - 6 = 14 \Rightarrow 2PA = 14 : 2$
 $PA = 7 \text{ cm}$

Exercițiul 7. Fie unghiurile adiacente suplementare $\angle AOB$ și $\angle BOC$. Fie OM bisectoarea unghiului $\angle AOB$ și ON bisectoarea unghiului $\angle BOC$.

- Demonstrați că $OM \perp ON$.
- Dacă OD este semidreapta opusă lui OM , arătați că $m(\angle DON) = 90^\circ$.



(OM - bisectoarea $\angle AOB \Rightarrow$
 $\Rightarrow m(\angle MOB) = \frac{m(\angle AOB)}{2}$

(ON - bisectoarea $\angle BOC \Rightarrow$
 $\Rightarrow m(\angle BON) = \frac{m(\angle BOC)}{2}$

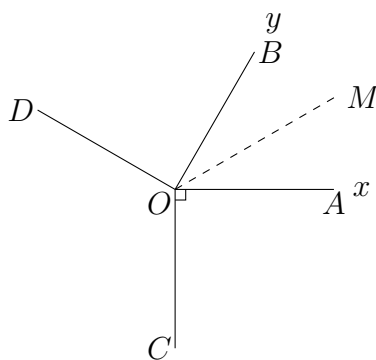
a) $m(\angle MON) = m(\angle MOB) + m(\angle BON)$
 $m(\angle MON) = \frac{m(\angle AOB)}{2} + \frac{m(\angle BOC)}{2} = \frac{m(\angle AOB) + m(\angle BOC)}{2} = \frac{180^\circ}{2} = 90^\circ \Rightarrow OM \perp ON$

b)

(OD - semidreapta opusă lui $OM \Rightarrow \angle AOD$ - liniară $\Rightarrow \angle DOM$ alungit
 $m(\angle DON) = m(\angle DOM) - m(\angle MON) = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$

Exercițiul 8. Fie unghiul ascuțit $\angle xOy$. Pe latura Ox se ia punctul A , iar pe latura Oy se ia punctul B . În exteriorul unghiului se construiesc semidreptele $OC \perp Ox$ și $OD \perp Oy$.

- (a) Arătați că unghiurile $\angle AOB$ și $\angle COD$ sunt suplementare.
 (b) Dacă bisectoarea unghiului $\angle AOB$ este OM , demonstrați că semidreapta opusă lui OM este bisectoarea unghiului $\angle COD$.



a)

Suma unghiurilor în jurul lui O este 360° .

$$m(\angle AOB) + m(\angle AOC) + m(\angle COD) + m(\angle BOD) = 360^\circ$$

$$\begin{array}{l} OC \perp Ox \\ A \in Ox \end{array} \Rightarrow m(\angle AOC) = 90^\circ$$

$$\begin{array}{l} OD \perp Oy \\ B \in Oy \end{array} \Rightarrow m(\angle BOD) = 90^\circ$$

$$m(\angle AOB) + 90^\circ + m(\angle COD) + 90^\circ = 360^\circ$$

$$m(\angle AOB) + m(\angle COD) = 360^\circ - 180^\circ = 180^\circ \Rightarrow \angle AOB \text{ și } \angle COD \text{ - suplementare}$$

b)

Fie OM - bisectoarea $\angle AOB$ și OM' - semidreapta opusă

Între-o configurație de unghiuri suplementare cu același vârf, dacă bisectoarele împart unghiurile în părți egale, proprietatea de simetrie față de axele perpendiculare arată că OM' împarte $\angle COD$ în 2 unghiuri egale, deci este bisectoare.