

Lecția 5 - Unghiuri în jurul unui punct

Clasa a 6-a – Capitolul Geometrie

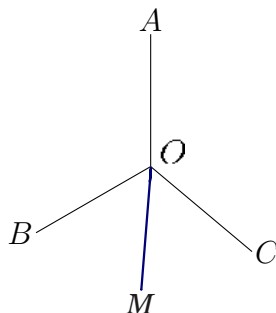
Instrucțiuni

Rezolvă exercițiile folosind teorema: suma măsurilor unghiurilor în jurul unui punct este de 360° . Durata recomandată: **50 de minute**.

Exerciții

Exercițiul 1. În figura alăturată, unghiurile $\angle AOB$, $\angle BOC$ și $\angle COA$ sunt unghiuri în jurul punctului O .

- Dacă $m(\angle AOB) = 120^\circ$ și $m(\angle BOC) = 110^\circ$, calculați măsura unghiului $\angle COA$.
- Verificați dacă semidreptele OA și bisectoarea unghiului $\angle BOC$ sunt semidrepte opuse.



Suma măsurilor unghiurilor în jurul unui punct este 360° .

a)

$$m(\angle AOB) + m(\angle BOC) + m(\angle COA) = 360^\circ$$

$$m(\angle COA) = 360^\circ - \underbrace{m(\angle AOB)}_{120^\circ} - \underbrace{m(\angle BOC)}_{110^\circ} = 360^\circ - 120^\circ - 110^\circ = 130^\circ$$

b)

$$\text{Fie } OM - \text{bisectoarea } \angle BOC \Rightarrow \overset{1}{m(\angle BOM)} = \frac{m(\angle BOC)}{2} = \frac{110^\circ}{2} = 55^\circ$$

Unghiul format de OA și OM : $m(\angle AOB) + m(\angle BOM) = 120^\circ + 55^\circ = 175^\circ = m(\angle AOM)$
 $175^\circ \neq 180^\circ \Rightarrow$ semidreptele nu sunt opuse.

Exercițiul 2. Se consideră 4 unghiuri în jurul unui punct O : $\angle AOB$, $\angle BOC$, $\angle COD$, $\angle DOA$.
Știind că măsurile lor sunt proporționale cu numerele 2, 3, 4 și 6:

- Determinați măsura fiecărui unghi.
- Realizați un desen corespunzător (aproximativ).

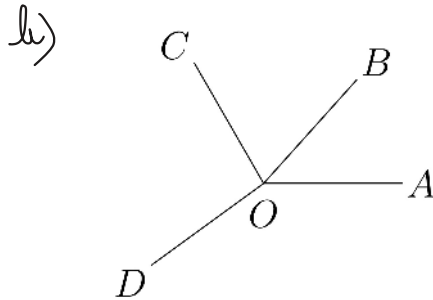
a) Notăm cu k factorul de proporționalitate

$$2k + 3k + 4k + 6k = 360$$

$$15k = 360 \quad | : 15 \Rightarrow k = 24^\circ$$

$$m(\angle AOB) = 2k = 2 \cdot 24 = 48^\circ, \quad m(\angle BOC) = 3k = 3 \cdot 24 = 72^\circ$$

$$m(\angle COD) = 4k = 4 \cdot 24 = 96^\circ, \quad m(\angle DOA) = 6k = 6 \cdot 24 = 144^\circ$$

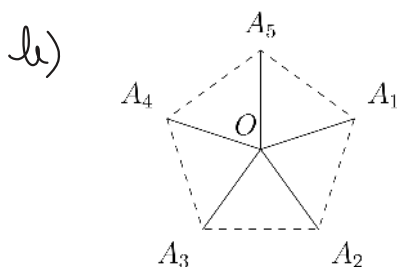


Exercițiul 3. În jurul punctului O se formează unghiurile congruente $\angle A_1OA_2, \angle A_2OA_3, \dots, \angle A_5OA_1$.

- Câte unghiuri sunt în total și care este măsura fiecăruia?
- Dacă unim punctele $A_1, A_2, \dots$, ce figură geometrică se formează?

a) Sunt 5 unghiuri: $\angle A_1OA_2, \angle A_2OA_3, \angle A_3OA_4, \angle A_4OA_5, \angle A_5OA_1$
congruente

$$\text{Fiecare unghi are: } \frac{360^\circ}{5} = 72^\circ$$

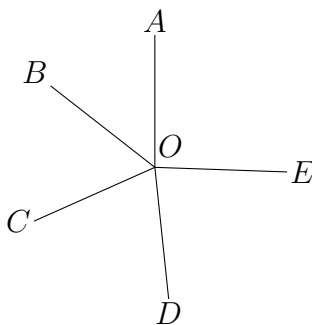


2

Se formează un pentagon regulat.

Exercițiul 4. Se consideră unghiurile în jurul unui punct O : $\angle AOB$, $\angle BOC$, $\angle COD$, $\angle DOE$, $\angle EOA$. Măsurile lor sunt x° , $x^\circ + 10^\circ$, $x^\circ + 20^\circ$, $x^\circ + 30^\circ$, $x^\circ + 40^\circ$.

- (a) Determinați valoarea lui x .
 (b) Calculați măsura celui mai mare unghi.



a)

$$\underline{x} + (\underline{x} + 10^\circ) + (\underline{x} + 20^\circ) + (\underline{x} + 30^\circ) + (\underline{x} + 40^\circ) = 360^\circ$$

$$5x + 10 + 20 + 30 + 40 = 360 \Rightarrow 5x + 100 = 360 \quad | -100$$

$$5x = 260 : 5 \Rightarrow x = 52^\circ$$

b)

cel mai mare unghi este $x + 40^\circ = 52^\circ + 40^\circ = 92^\circ$

Exercițiul 5. Prin punctul O se duc dreptele AB , CD și EF astfel încât unghiurile formate în jurul punctului O să nu aibă puncte interioare comune. Știind că $m(\angle AOC) = 40^\circ$ și $m(\angle COE) = 80^\circ$ (punctele fiind în ordinea A, C, E pe cerc):

- (a) Calculați măsurile celorlalte unghiuri formate.
 (b) Precizați o pereche de unghiuri opuse la vârf.

a) $\angle AOC$ și $\angle BOD$ - opuse la vârf.

$$m(\angle AOC) = m(\angle BOD) = 40^\circ$$

$\angle COE$ și $\angle DOF$ - opuse la vârf.

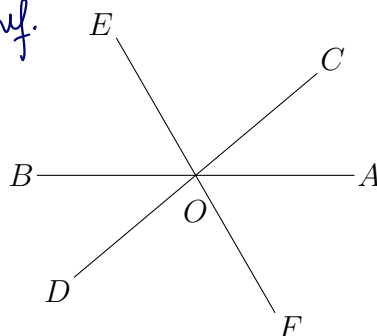
$$m(\angle COE) = m(\angle DOF) = 80^\circ$$

$$m(\angle AOC) + m(\angle COE) + m(\angle EOB) = 180^\circ$$

$$m(\angle EOB) = 180^\circ - 40^\circ - 80^\circ = 60^\circ$$

$\angle EOB$ și $\angle AOF$ - opuse la vârf. $\Rightarrow m(\angle EOB) = m(\angle AOF) = 60^\circ$

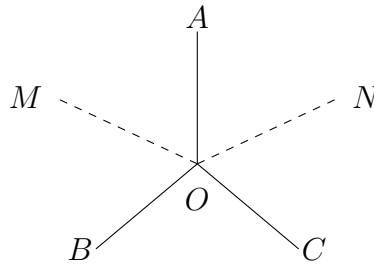
Verificare: $m(\angle AOC) + m(\angle COE) + m(\angle EOB) + m(\angle BOD) + m(\angle DOF) + m(\angle FOA) =$
 $= 40^\circ + 80^\circ + 60^\circ + 40^\circ + 80^\circ + 60^\circ = 180^\circ + 180^\circ = 360^\circ$



b) Unghiuri opuse la vârf: $\angle BOE$ și $\angle FOA$

Exercițiul 6. În jurul punctului O avem unghiurile $\angle AOB, \angle BOC, \angle COA$. Se știe că $m(\angle AOB) = 130^\circ$ și $m(\angle BOC) = 100^\circ$. Fie OM bisectoarea unghiului $\angle AOB$ și ON bisectoarea unghiului $\angle AOC$.

- (a) Calculați măsura unghiului $\angle AOC$.
 (b) Calculați măsura unghiului $\angle MON$.



a)

$$m(\angle AOB) + m(\angle BOC) + m(\angle AOC) = 360^\circ$$

$$m(\angle AOC) = 360^\circ - m(\angle AOB) - m(\angle BOC)$$

$$m(\angle AOC) = 360^\circ - 130^\circ - 100^\circ$$

$$m(\angle AOC) = 130^\circ$$

b)

$$(OM - \text{linctarea } \angle AOB \Rightarrow m(\angle AOM) = m(\angle BOM) = \frac{m(\angle AOB)}{2}$$

$$m(\angle AOM) = \frac{130^\circ}{2} = 65^\circ$$

$$(ON - \text{linctarea } \angle AOC \Rightarrow m(\angle AON) = m(\angle NOC) = \frac{m(\angle AOC)}{2}$$

$$m(\angle AON) = \frac{130^\circ}{2} = 65^\circ$$

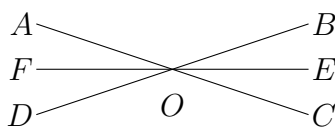
$$m(\angle MON) = m(\angle AOM) + m(\angle AON)$$

$$m(\angle MON) = 65^\circ + 65^\circ$$

$$m(\angle MON) = 130^\circ$$

Exercițiul 7. Se consideră dreptele concurente AC și BD care se intersectează în punctul O . Fie OE bisectoarea unghiului $\angle BOC$.

- (a) Arătați că semidreapta opusă lui OE este bisectoarea unghiului $\angle AOD$.
 (b) Dacă $m(\angle AOB) = 50^\circ$, calculați măsura unghiului dintre OE și OA .



- a) $\angle BOC$ și $\angle AOD$ - opuse la vârf $\Rightarrow \angle BOC \equiv \angle AOD$
 OE împarte $\angle BOC$ în 2 părți egale $\Rightarrow OF$ împarte $\angle AOD$ în 2 părți egale cu celelalte 2 $\Rightarrow$ semidreapta opusă lui OE este bisectoarea $\angle AOD$.
- b) $m(\angle BOC) = 180^\circ - m(\angle AOB) = 180^\circ - 50^\circ = 130^\circ$
 OE - bisectoarea $\angle BOC \Rightarrow m(\angle BOE) = \frac{130^\circ}{2} = 65^\circ$
 $m(\angle EOA) = m(\angle EOB) + m(\angle BOA) = 65^\circ + 50^\circ = 115^\circ$

Exercițiul 8. Se consideră n unghiuri în jurul unui punct O , având măsurile exprimate prin numerele: $10^\circ, 20^\circ, 30^\circ, \dots, (10 \cdot n)^\circ$.

- (a) Determinați numărul natural n al unghiurilor.
 (b) Arătați că nu se pot alege câteva dintre aceste unghiuri astfel încât suma măsurilor lor să fie egală cu 75° .

a)

$$10^\circ + 20^\circ + 30^\circ + \dots + (10n)^\circ = 360^\circ$$

10 este factor comun

$$10^\circ(1 + 2 + 3 + \dots + n) = 360^\circ \quad | :10^\circ$$

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = 36$$

Aplicăm formula lui Gauss: $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

$$\frac{n(n+1)}{2} = 36 \quad | \cdot 2 \Rightarrow n(n+1) = 72 \Rightarrow n = 8$$

b) Toate unghiurile sunt ⁵ multipli de 10, deci orice sumă de unghiuri va fi multiplu de 10. 75 nu divide 10 $\Rightarrow$ imposibil