

Fișă de lucru

Lecția 5 – Congruența triunghiurilor dreptunghice

Clasa a 6-a – Capitolul 2 – Triunghiul. Congruența triunghiurilor

Instrucțiuni

Rezolvă exercițiile folosind cazurile specifice de congruență pentru triunghiurile dreptunghice:

- **C.C.** (Catetă-Catetă)
- **C.U.** (Catetă-Unghi ascuțit)
- **I.U.** (Ipotenuză-Unghi ascuțit)
- **I.C.** (Ipotenuză-Catetă)

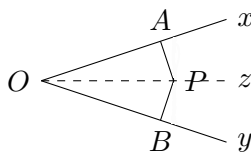
Durata recomandată: **50 minute**.

Exerciții

Exercițiul 1. Se dau triunghiurile dreptunghice ABC ($m(\angle A) = 90^\circ$) și DEF ($m(\angle D) = 90^\circ$). Stabiliți dacă triunghiurile sunt congruente și precizați cazul de congruență în următoarele situații:

- (a) $AB = DE = 4$ cm și $AC = DF = 3$ cm.
- (b) $BC = EF = 10$ cm și $AB = DE = 6$ cm.
- (c) $BC = EF = 8$ cm și $m(\angle B) = m(\angle E) = 30^\circ$.

Exercițiul 2. Fie unghiul $\angle xOy$. Pe bisectoarea acestui unghi se ia un punct P . Din P se duc perpendicularele $PA \perp Ox$ ($A \in Ox$) și $PB \perp Oy$ ($B \in Oy$). Demonstrați că $\triangle OAP \equiv \triangle OBP$ și că $OA = OB$.



Exercițiul 3. Triunghiul ABC este isoscel cu $AB = AC$. Fie $AD \perp BC$ ($D \in BC$). Demonstrați că $\triangle ADB \equiv \triangle ADC$ folosind cazul **Ipotenuză-Catetă (I.C.)**.

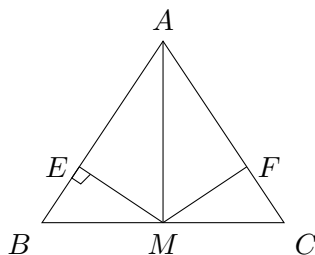
Exercițiul 4. Fie segmentul AB și d mediatoarea acestuia ($d \perp AB$ și trece prin mijlocul O). Fie M un punct oarecare pe dreapta d . Demonstrați că triunghiurile dreptunghice AOM și BOM sunt congruente și deduceți că $MA = MB$.

Exercițiul 5. Se consideră triunghiul ABC cu $m(\angle A) = 90^\circ$ și $AB = AC$. Fie D un punct pe ipotenuza BC astfel încât $AD \perp BC$. Demonstrați că triunghiurile ABD și ACD sunt congruente. Ce măsură au unghiurile $\angle BAD$ și $\angle CAD$?

Exercițiul 6. Fie triunghiul isoscel ABC ($AB = AC$). Fie M mijlocul bazei BC . Din M se duc perpendicularele $ME \perp AB$ ($E \in AB$) și $MF \perp AC$ ($F \in AC$).

(a) Demonstrați că $\triangle BEM \equiv \triangle CFM$.

(b) Arătați că $ME = MF$.



Exercițiul 7. Fie $\triangle ABC$ dreptunghic în A . Fie M mijlocul catetei AC . Construim punctul D simetricul lui B față de M (adică M este mijlocul segmentului BD , punctele $B - M - D$ coliniare).

(a) Demonstrați că $\triangle ABM \equiv \triangle CDM$.

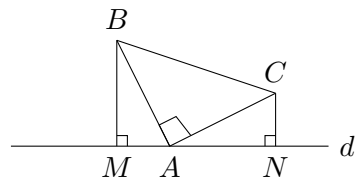
(b) Demonstrați că $\triangle CDM$ este dreptunghic și că $CD \perp AC$.

(c) Arătați că $CD \parallel AB$.

Exercițiul 8. Fie triunghiul dreptunghic isoscel ABC cu $m(\angle A) = 90^\circ$ și $AB = AC$. Prin vârful A se duce o dreaptă d care nu intersectează interiorul triunghiului. Ducem perpendicularele $BM \perp d$ și $CN \perp d$ ($M, N \in d$). Demonstrați că:

(a) $\triangle ABM \equiv \triangle CAN$ (Atenție la unghiuri! Folosiți faptul că suma unghiurilor în jurul lui A este 180°).

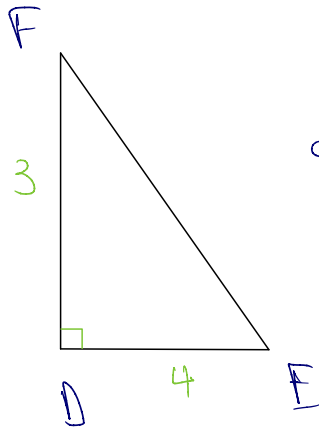
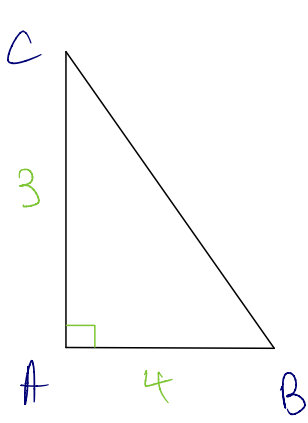
(b) $MN = BM + CN$.



Succes!

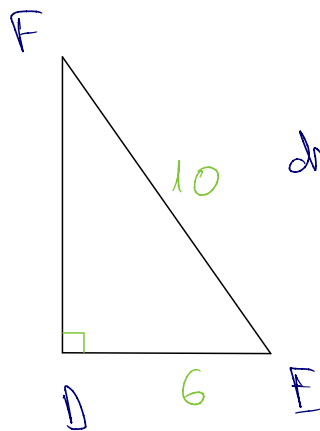
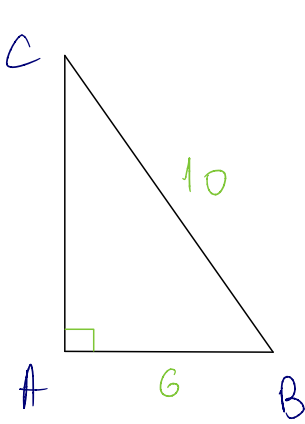
Exercițiul 1. Se dau triunghiurile dreptunghice ABC ($m(\angle A) = 90^\circ$) și DEF ($m(\angle D) = 90^\circ$). Stabiliți dacă triunghiurile sunt congruente și precizați cazul de congruență în următoarele situații:

(a) $AB = DE = 4$ cm și $AC = DF = 3$ cm.



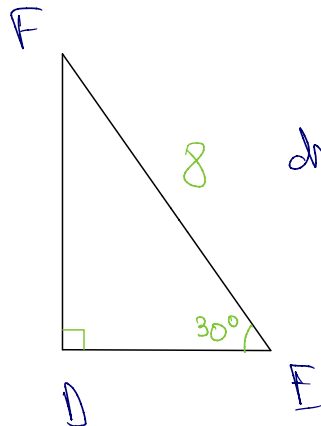
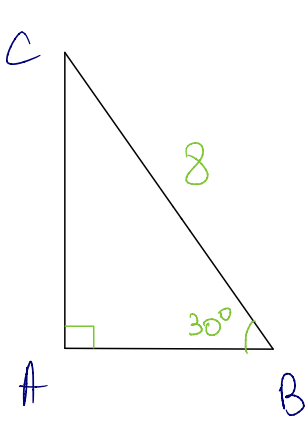
$$\left. \begin{array}{l} \triangle ABC \\ \triangle DEF \\ \text{dreptunghice} \end{array} \right\} \begin{array}{l} AC = DF \\ AB = DE \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l} \triangle ABC \\ \triangle DEF \\ \text{dreptunghice} \end{array}} \right\} \begin{array}{l} \text{C.C.} \\ \implies \triangle ABC \equiv \triangle DEF \end{array}$$

(b) $BC = EF = 10$ cm și $AB = DE = 6$ cm.



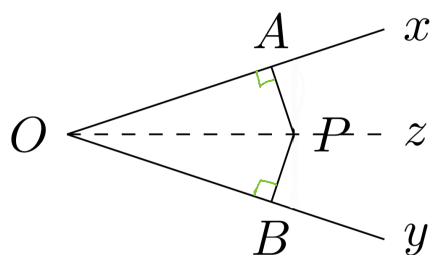
$$\left. \begin{array}{l} \triangle ABC \\ \triangle DEF \\ \text{dreptunghice} \end{array} \right\} \begin{array}{l} BC = EF \\ AB = DE \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l} \triangle ABC \\ \triangle DEF \\ \text{dreptunghice} \end{array}} \right\} \begin{array}{l} \text{I.C.} \\ \implies \triangle ABC \equiv \triangle DEF \end{array}$$

(c) $BC = EF = 8$ cm și $m(\angle B) = m(\angle E) = 30^\circ$.



$$\left. \begin{array}{l} \triangle ABC \\ \triangle DEF \\ \text{dreptunghice} \end{array} \right\} \begin{array}{l} BC = EF \\ \angle B = \angle E \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l} \triangle ABC \\ \triangle DEF \\ \text{dreptunghice} \end{array}} \right\} \begin{array}{l} \text{I.V.} \\ \implies \triangle ABC \equiv \triangle DEF \end{array}$$

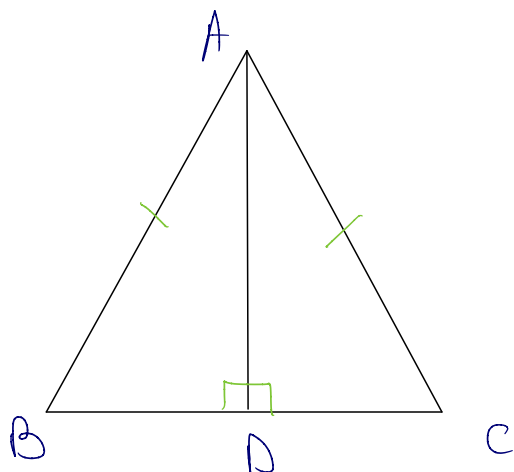
Exercițiul 2. Fie unghiul $\angle xOy$. Pe bisectoarea acestui unghi se ia un punct P . Din P se duc perpendicularele $PA \perp Ox$ ($A \in Ox$) și $PB \perp Oy$ ($B \in Oy$). Demonstrați că $\triangle OAP \equiv \triangle OBP$ și că $OA = OB$.



$$\begin{aligned} \angle OAP &= \angle OBP = 90^\circ \\ [OP \text{ bis } \widehat{AOB} &\Rightarrow \angle AOP = \angle BOP \\ \triangle OAP & \quad \left. \begin{array}{l} \angle AOP = \angle BOP \\ OP - \text{latură comună} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{i. U.} \\ \Rightarrow \end{array} \triangle OAP &\equiv \triangle OBP \\ \triangle OBP & \text{ dreptunghice} \end{aligned}$$

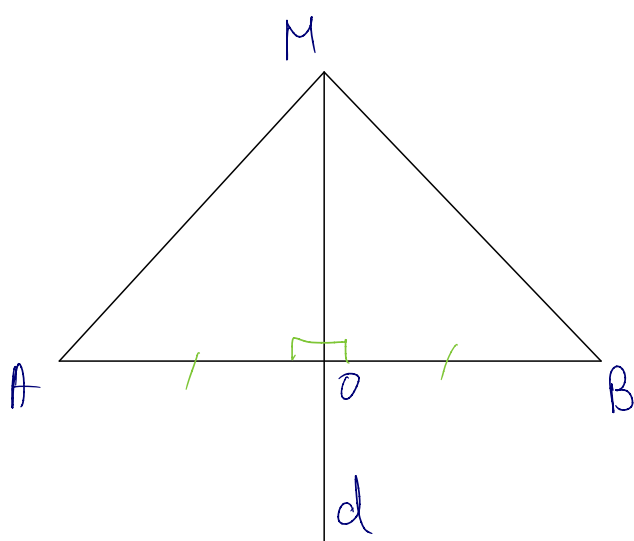
$$\triangle OAP \equiv \triangle OBP \Rightarrow OA = OB$$

Exercițiul 3. Triunghiul ABC este isoscel cu $AB = AC$. Fie $AD \perp BC$ ($D \in BC$). Demonstrați că $\triangle ADB \equiv \triangle ADC$ folosind cazul **Ipotenuză-Catetă (I.C.)**.



$$\begin{aligned} \triangle ABC \text{ isoscel} &\Rightarrow AB = AC \\ AD \perp BC &\Rightarrow \angle ADB = \angle ADC = 90^\circ \\ \triangle ADB & \quad \left. \begin{array}{l} AB = AC \\ AD - \text{latură} \\ \triangle ADC & \text{comună} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{i. C.} \\ \Rightarrow \end{array} \triangle ADB &\equiv \triangle ADC \\ \text{dreptunghice} & \end{aligned}$$

Exercițiul 4. Fie segmentul AB și d mediatoarea acestuia ($d \perp AB$ și trece prin mijlocul O). Fie M un punct oarecare pe dreapta d . Demonstrați că triunghiurile dreptunghice AOM și BOM sunt congruente și deduceți că $MA = MB$.

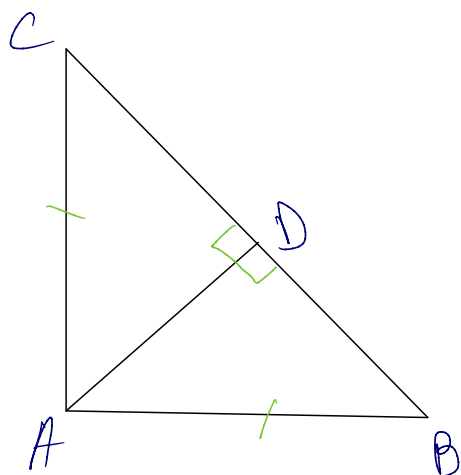


$$\begin{aligned} MO \text{ mediatoare} &\Rightarrow AO = OB \text{ și } d \perp AB \\ d \perp AB &\Rightarrow \angle MOA = \angle MOB = 90^\circ \\ \triangle MOA & \quad \left. \begin{array}{l} MO - \text{latură} \\ \triangle MOB & \text{comună} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{c.c.} \\ \Rightarrow \end{array} \triangle MOA &\equiv \triangle MOB \\ \text{dreptunghice} & \quad AO = OB \end{aligned}$$

$$\Downarrow$$

$$MA = MB$$

Exercițiul 5. Se consideră triunghiul ABC cu $m(\angle A) = 90^\circ$ și $AB = AC$. Fie D un punct pe ipotenuza BC astfel încât $AD \perp BC$. Demonstrați că triunghiurile ABD și ACD sunt congruente. Ce măsură au unghiurile $\angle BAD$ și $\angle CAD$?



$$AD \perp BC \Rightarrow \angle ADC = \angle ADB = 90^\circ$$

$$\begin{array}{l} \triangle ADC \\ \triangle ADB \end{array} \left| \begin{array}{l} AB = AC \\ AD - \text{latră} \\ \text{comună} \end{array} \right. \left. \begin{array}{l} \text{i.c.} \\ \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle ADC \equiv \triangle ADB$$

$$\triangle ADC \equiv \triangle ADB \Rightarrow \angle DAC = \angle DAB$$

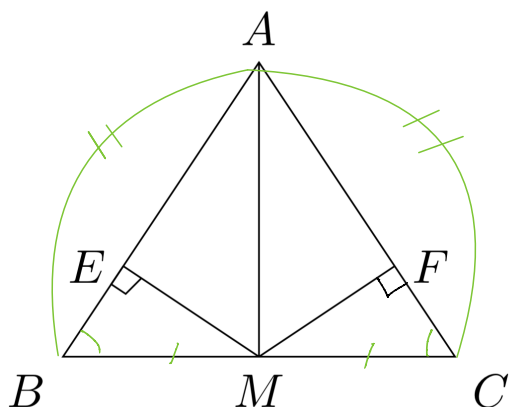
$$\angle BAC = \angle DAC + \angle DAB = 90^\circ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \angle DAC = \angle DAB = \frac{90^\circ}{2} = 45^\circ$$

Exercițiul 6. Fie triunghiul isoscel ABC ($AB = AC$). Fie M mijlocul bazei BC . Din M se duc perpendicularele $ME \perp AB$ ($E \in AB$) și $MF \perp AC$ ($F \in AC$).

(a) Demonstrați că $\triangle BEM \equiv \triangle CFM$.

(b) Arătați că $ME = MF$.



$$a) \triangle ABC \text{ isoscel} \Rightarrow \angle ABC = \angle ACB \Rightarrow \angle ABM = \angle ACM$$

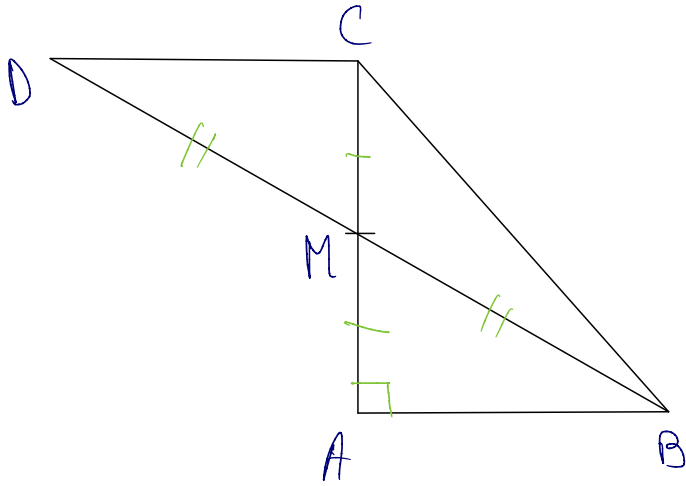
$$M \text{ mijlocul } [BC] \Rightarrow BM = MC$$

$$\begin{array}{l} \triangle BEM \\ \triangle CFM \end{array} \left| \begin{array}{l} BM = MC \\ \angle EBM = \angle FCM \end{array} \right. \left. \begin{array}{l} \text{i.u.} \\ \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle BEM \equiv \triangle CFM$$

$$b) \triangle BEM \equiv \triangle CFM \Rightarrow ME = MF$$

Exercițiul 7. Fie $\triangle ABC$ dreptunghic în A . Fie M mijlocul catetei AC . Construim punctul D simetricul lui B față de M (adică M este mijlocul segmentului BD , punctele $B - M - D$ coliniare).

- Demonstrați că $\triangle ABM \equiv \triangle CDM$.
- Demonstrați că $\triangle CDM$ este dreptunghic și că $CD \perp AC$.
- Arătați că $CD \parallel AB$.



a) M mijlocul $[AC] \Rightarrow AM = MC$

D simetricul lui B față de $M \Rightarrow BM = MD$

$$\left. \begin{array}{l} \triangle ABM \\ \triangle CDM \end{array} \right| \begin{array}{l} BM = DM \\ AM = MC \\ \angle AMB = \angle CMD \\ \text{(opuse la vârf)} \end{array} \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{LVL} \\ \Rightarrow \\ \triangle ABM \equiv \triangle CDM \end{array}$$

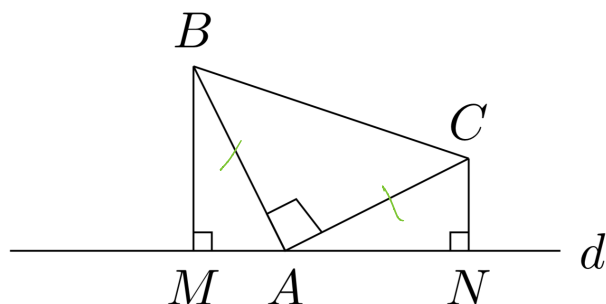
$$\left. \begin{array}{l} b) \triangle ABM \equiv \triangle CDM \Rightarrow \angle MCD = \angle MAB \\ \triangle ABC \text{ dreptunghic} \Rightarrow \angle MAB = 90^\circ \end{array} \right\} \Rightarrow \angle MCD = 90^\circ \Rightarrow \triangle CDM \text{ dreptunghic}$$

$$\left. \begin{array}{l} \angle MCD = 90^\circ \Rightarrow CD \perp CM \\ C, M, A \text{ coliniare} \end{array} \right\} \Rightarrow CD \perp AC$$

c) $\triangle ABM \equiv \triangle CDM \Rightarrow \angle ABM = \angle CDM$ care au poziție de alternate interne față de dreptele AB și CD tăiate de secanta $BD \Rightarrow AB \parallel CD$

Exercițiul 8. Fie triunghiul dreptunghic isoscel ABC cu $m(\angle A) = 90^\circ$ și $AB = AC$. Prin vârful A se duce o dreaptă d care nu intersectează interiorul triunghiului. Ducem perpendicularele $BM \perp d$ și $CN \perp d$ ($M, N \in d$). Demonstrați că:

- (a) $\triangle ABM \equiv \triangle CAN$ (Atenție la unghiuri! Folosiți faptul că suma unghiurilor în jurul lui A este 180°).
 (b) $MN = BM + CN$.



$$\begin{aligned} \text{a) } \angle MAN &= 180^\circ \\ \angle MAN &= \angle MAB + \angle BAC + \angle CAN \quad \} \Rightarrow \\ \angle MAB + \underbrace{\angle BAC}_{90^\circ} + \angle CAN &= 180^\circ \quad | -90^\circ \\ \Rightarrow \angle MAB + \angle CAN &= 90^\circ \end{aligned}$$

$$\text{În } \triangle BMA: \underbrace{\angle BMA}_{90^\circ} + \angle ABM + \angle BAN = 180^\circ \Rightarrow \angle ABM + \angle BAN = 90^\circ$$

$$\Rightarrow \angle CAN = \angle ABM$$

$$\begin{array}{l} \triangle ABM \\ \triangle CAN \end{array} \left| \begin{array}{l} AB = AC \\ \angle ABM = \angle CAN \end{array} \right. \} \xRightarrow{\text{i.v.}} \triangle ABM \equiv \triangle CAN$$

dreptunghice

$$\begin{aligned} \text{b) } MN &= \underline{MA} + \underline{AN} \\ \triangle ABM \equiv \triangle CAN &\Rightarrow BM = \underline{AN} \text{ și } \underline{AM} = CN \quad \} \Rightarrow MN = BM + CN \end{aligned}$$