



Fișă de lucru

Lecția 5 – Probleme care se rezolvă folosind divizibilitatea

Clasa a 6-a – Capitolul 2 - Numere naturale

Instrucțiuni

Rezolvă exercițiile de mai jos aplicând proprietăți ale divizibilității, criterii, și calcule cu c.m.m.d.c. sau c.m.m.m.c. După fiecare exercițiu, verifică răspunsul.

Exerciții

Exercițiul 1. Fie mulțimea $M = \{1, 2, 3, 5, 6, 9, 12, 15, 184\}$. Determină:

- a) $A = \{x \in M \mid x \text{ divizibil cu } 12\}$
- b) $B = \{x \in M \mid 2 \mid x\}$
- c) $C = \{x \in M \mid 3 \mid x\}$

Rezolvare:

- a) *Multiplii lui 12 din M:* $A = \{12\}$.
- b) *Elemente pare din M:* $B = \{2, 6, 12, 184\}$.
- c) *Multiplii lui 3 din M:* $C = \{3, 6, 9, 12, 15\}$.

Exercițiul 2. Determină cifra a astfel încât:

- a) Numărul $\overline{a7}$ să fie divizibil cu 2;
- b) Numărul $\overline{75a}$ să fie divizibil cu 3;
- c) Numărul $\overline{65a}$ să fie divizibil cu 5.

Rezolvare:

a) Un număr este divizibil cu 2 dacă ultima cifră este pară. Ultima cifră este 7, deci nu există a .

b) Divizibil cu 3 $\Leftrightarrow$ suma cifrelor este multiplu de 3:

$$7 + 5 + a = 12 + a \text{ multiplu de } 3 \Rightarrow a \in \{0, 3, 6, 9\}.$$

$$\boxed{a \in \{0, 3, 6, 9\}}.$$

c) Divizibil cu 5 $\Leftrightarrow$ ultima cifră 0 sau 5. $a \in \{0, 5\}$.

Exercițiul 3. Fie $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x \mid 30\}$ și $B = \{y \in \mathbb{N} \mid y = 5k, y < 31\}$. Determină:

- a) Elementele mulțimilor A și B ;
- b) $\text{card}(A)$ și $\text{card}(B)$;
- c) $A \cup B$, $A \cap B$, $A - B$, $B - A$.

Rezolvare:

a) Divizorii pozitivi ai lui 30:

$$A = \{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\}.$$

Multiplii lui 5 mai mici decât 31 (cu $0 \in \mathbb{N}$):

$$B = \{0, 5, 10, 15, 20, 25, 30\}.$$

b) $\text{card}(A) = 8$, $\text{card}(B) = 7$.

c)

$$A \cup B = \{0, 1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 20, 25, 30\},$$

$$A \cap B = \{5, 10, 15, 30\},$$

$$A - B = \{1, 2, 3, 6\}, \quad B - A = \{0, 20, 25\}.$$

Exercițiul 4. Calculează c.m.m.d.c. și c.m.m.m.c. pentru numerele 56 și 42.

Rezolvare:

Factorizări: $56 = 2^3 \cdot 7$, $42 = 2 \cdot 3 \cdot 7$.

$$(56, 42) = 2^{\min(3,1)} \cdot 7^{\min(1,1)} = 2 \cdot 7 = \boxed{14}.$$

$$[56, 42] = \frac{56 \cdot 42}{(56, 42)} = \frac{56 \cdot 42}{14} = 56 \cdot 3 = \boxed{168}.$$

Exercițiul 5. Numerele 202 și 445 împărțite la același număr natural dau resturile 6 și 4. Află cea mai mare valoare a împărțitorului.

Rezolvare:

Fie x numărul la care împărțim. Scriem împărțirile:

$$202 : x = c_1 \text{ rest } 6, \quad 445 : x = c_2 \text{ rest } 4.$$

Cu teorema împărțirii cu rest:

$$202 = xc_1 + 6, \quad 445 = xc_2 + 4.$$

Scădem resturile:

$$202 - 6 = xc_1, \quad 445 - 4 = xc_2 \Rightarrow x \text{ divide } 196 \text{ și } 441.$$

Cel mai mare astfel de divizor este c.m.m.d.c.-ul numerelor 196 și 441:

$$196 = 2^2 \cdot 7^2, \quad 441 = 3^2 \cdot 7^2 \Rightarrow (196, 441) = 7^2 = \boxed{49}.$$

Verificare:

$$202 : 49 = 4 \text{ rest } 6, \quad 445 : 49 = 9 \text{ rest } 4.$$

Exercițiul 6. Află toate numerele naturale de trei cifre care, împărțite la 18, 24 și 36, dau de fiecare dată restul 15.

Rezolvare:

Fie x, y, z trei numere naturale astfel încât:

$$x : 18 = q_1 \text{ rest } 15, \quad y : 24 = q_2 \text{ rest } 15, \quad z : 36 = q_3 \text{ rest } 15.$$

Scriem cu teorema împărțirii cu rest:

$$x = 18q_1 + 15, \quad y = 24q_2 + 15, \quad z = 36q_3 + 15.$$

Pentru un același număr N care să lase restul 15 la împărțirea la 18, 24, 36, trebuie să avem simultan:

$$N = 18q_1 + 15, \quad N = 24q_2 + 15, \quad N = 36q_3 + 15.$$

Deci $N - 15$ este multiplu de 18, de 24 și de 36 $\Rightarrow N - 15$ este multiplu comun al lor.

Calculăm cel mai mic multiplu comun:

$$[18, 24, 36] = 2^3 \cdot 3^2 = 72.$$

Așadar

$$N = 15 + 72k, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Impunem număr de trei cifre”: $100 \leq N \leq 999$.

$$100 \leq 15 + 72k \leq 999 \Rightarrow 85 \leq 72k \leq 984 \Rightarrow 2 \leq k \leq 13.$$

Rezultă toate soluțiile:

$$N \in \{159, 231, 303, 375, 447, 519, 591, 663, 735, 807, 879, 951\}.$$

Exercițiul 7. Arată că pentru orice $n \in \mathbb{N}$, expresia

$$A = 12^n \cdot 2^4 + 3^4 + 2 \cdot 4^4 + 12^n + 3 \cdot 6^4$$

este divizibilă cu 17.

Rezolvare:

Pornim de la

$$A = 12^n \cdot 2^4 + 3^4 + 2 \cdot 4^4 + 12^n + 3 \cdot 6^4.$$

Grupăm termenii cu 12^n :

$$12^n \cdot 2^4 + 12^n = 12^n (16 + 1) = 17 \cdot 12^n,$$

care este multiplu de 17.

Partea rămasă (constantă față de n) este:

$$C = 3^4 + 2 \cdot 4^4 + 3 \cdot 6^4 = 81 + 2 \cdot 256 + 3 \cdot 1296 = 81 + 512 + 3888 = 4481.$$

Aplicăm teorema împărțirii cu rest pentru a împărți 4481 la 17:

$$4481 = 17 \cdot 263 + 10 \quad (\text{deoarece } 17 \cdot 263 = 4471).$$

Deci, la împărțirea lui 4481 la 17 restul este 10.

Prin urmare,

$$A = (17 \cdot 12^n) + 4481 = 17 \cdot (12^n + 263) + 10.$$

Când împărțim A la 17, obținem restul 10, nu 0. Asta arată că, **așa cum este scris**, enunțul A este divizibil cu 17 pentru orice $n \in \mathbb{N}$ este **fals**.

Verificare rapidă pentru $n = 0$:

$$A = 12^0 \cdot 16 + 3^4 + 2 \cdot 4^4 + 12^0 + 3 \cdot 6^4 = 16 + 81 + 512 + 1 + 3888 = 4498.$$

Împărțind 4498 la 17: $4498 = 17 \cdot 264 + 10$ (rest 10), deci nu este divizibil.

Exercițiul 8. Arată că pentru orice $n \in \mathbb{N}$, expresia

$$A = 3^{2n} + 5 \cdot 7^{n-1} + 1 - 2^{2n+1} \cdot 4 + 2$$

este divizibilă cu 33.

Rezolvare (detaliată, cu teorema împărțirii cu rest):

Trebuie să verificăm dacă, pentru orice $n \in \mathbb{N}$,

$$A = 3^{2n} + 5 \cdot 7^{n-1} + 1 - 2^{2n+1} \cdot 4 + 2$$

este multiplu de 33.

Pentru a infirma afirmația pentru orice n ", este suficient să găsim un singur n pentru care nu se împlinește. Alegem $n = 1$ și calculăm pas cu pas:

$$\begin{aligned} 3^{2 \cdot 1} &= 3^2 = 9, & 5 \cdot 7^{1-1} &= 5 \cdot 7^0 = 5 \cdot 1 = 5, \\ -2^{2 \cdot 1 + 1} \cdot 4 &= -2^3 \cdot 4 = -8 \cdot 4 = -32, & 1 + 2 &= 3. \end{aligned}$$

Adunând:

$$A = 9 + 5 + 3 - 32 = 17 - 32 = -15.$$

Aplicăm teorema împărțirii cu rest la împărțirea lui 15 la 33:

$$15 = 33 \cdot 0 + 15 \quad (\text{rest } 15 \neq 0).$$

Așadar 33 nu divide 15, deci nici -15 .

Concluzie: *pentru $n = 1$ obținem $A = -15$, care nu este multiplu de 33; prin urmare enunțul din exercițiu, așa cum este scris, este **fals**.*

Succes!