

Fișă de lucru

Lecția 4 - Proportii derivate și șiruri de rapoarte egale

Clasa a 6-a – Capitolul 3 - Rapoarte și proporții

Exerciții

Exercițiul 1. Pornind de la proporția $\frac{4}{6} = \frac{6}{9}$, scrieți 3 proporții derivate cu aceiași termeni:

- (a) prin schimbarea mezilor,
- (b) prin schimbarea extremilor,
- (c) prin inversarea rapoartelor.

Rezolvare:

(a) **Schimbarea mezilor (alternând):** din $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ rezultă $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$. Aplicat aici: $\frac{4}{6} = \frac{6}{9} \Rightarrow \frac{4}{6} = \frac{6}{9}$. Aici mezii” sunt amândoi 6, deci proporția rămâne aceeași.

(b) **Schimbarea extremilor:** $\frac{d}{b} = \frac{c}{a}$. Aici: $\frac{9}{6} = \frac{6}{4}$.

(c) **Inversarea rapoartelor (invertind ambele rapoarte):** $\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$. Aici: $\frac{6}{4} = \frac{9}{6}$.

Exercițiul 2. Determinați termenul necunoscut x din proporția $\frac{x}{18} = \frac{10}{36}$ și scrieți două proporții derivate cu aceiași termeni.

Rezolvare:

$$\frac{x}{18} = \frac{10}{36} \Rightarrow 36x = 18 \cdot 10 \Rightarrow 36x = 180 \Rightarrow \boxed{x = 5}.$$

Două proporții derivate cu aceiași termeni 5, 18, 10, 36:

$$\frac{18}{5} = \frac{36}{10} \text{ (inversarea rapoartelor), } \quad \frac{5}{10} = \frac{18}{36} \text{ (schimbarea mezilor/alternând).}$$

Exercițiul 3. Scrieți 4 proporții derivate cu alți termeni, folosind proporția $\frac{3}{5} = \frac{6}{10}$ și aplicând următoarele:

- (a) amplificare cu 2 a numărătorilor;
- (b) împărțirea numitorilor la 5;
- (c) schimbarea între numărător și numitor;
- (d) adunarea cu 1 la fiecare numitor.

Rezolvare:

Plecăm de la $\frac{3}{5} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$.

(a) **Amplificăm numărătorii cu 2** (numitorii rămân): $\frac{6}{5} = \frac{12}{10}$.

(b) **Împărțim numitorii la 5** (numărătorii rămân): $\frac{3}{1} = \frac{6}{2}$.

(c) **Schimbăm numărător cu numitor** (inversăm ambele rapoarte):
 $\frac{5}{3} = \frac{10}{6}$.

(d) **(Atenție) Adunarea cu 1 la fiecare numitor** nu păstrează în general proporția: $\frac{3}{5+1} \neq \frac{6}{10+1}$. O transformare corectă de tip adunare este componendo: $\frac{3+5}{5} = \frac{6+10}{10}$, adică $\frac{8}{5} = \frac{16}{10}$.

Exercițiul 4. Se cunosc: $\frac{x}{y} = \frac{y}{z} = \frac{z}{w}$ și $x + y + z + w = 60$. Dacă $x = 3k$, calculați valorile lui x, y, z, w .

Rezolvare:

Scriem un șir de rapoarte egale cu raportul comun $t > 0$:
 $y = tx, z = ty = t^2x, w = tz = t^3x$. Cu $x = 3k$ avem:

$$x = 3k, \quad y = 3kt, \quad z = 3kt^2, \quad w = 3kt^3.$$

Condiția sumei:

$$x + y + z + w = 3k(1 + t + t^2 + t^3) = 60 \Rightarrow k(1 + t + t^2 + t^3) = 20.$$

O soluție naturală simplă este $t = 1$ (toate egale) $\Rightarrow 1 + t + t^2 + t^3 = 4$,
deci $k = 5$. Astfel

$$\boxed{x = 15, y = 15, z = 15, w = 15}.$$

În general, există și alte soluții raționale cu $k = \frac{20}{1 + t + t^2 + t^3}$.

Exercițiul 5. Fie șirul de rapoarte egale: $\frac{x}{5} = \frac{y}{8} = \frac{10}{z}$, cu condiția $x + y = 13$.
Determinați valorile lui x , y și z .

Rezolvare:

Notăm valoarea comună k :

$$\frac{x}{5} = k \Rightarrow x = 5k, \quad \frac{y}{8} = k \Rightarrow y = 8k, \quad \frac{10}{z} = k \Rightarrow z = \frac{10}{k}.$$

Din $x + y = 13$ rezultă $5k + 8k = 13k = 13 \Rightarrow \boxed{k = 1}$. Așadar
 $\boxed{x = 5, y = 8, z = 10}$.

Exercițiul 6. Se consideră proporția $\frac{a}{b} = \frac{7}{13}$. Determinați valorile lui a și b în fiecare dintre următoarele cazuri:

- (a) $a + b = 60$
- (b) $a - b = 20$
- (c) $3a + 2b = 94$
- (d) $5a - b = 66$

Rezolvare:

Scriem $a = 7t$, $b = 13t$ (cu $t \in \mathbb{R}$, de regulă $t \in \mathbb{N}$ în probleme cu numere naturale).

$$(a) \quad 7t + 13t = 60 \Rightarrow 20t = 60 \Rightarrow \boxed{t = 3} \Rightarrow \boxed{(a, b) = (21, 39)}.$$

$$(b) \quad 7t - 13t = 20 \Rightarrow -6t = 20 \Rightarrow t = -\frac{10}{3} \Rightarrow (a, b) = \left(-\frac{70}{3}, -\frac{130}{3}\right). \text{ Nu există soluții în } \mathbb{N}; \text{ în } \mathbb{Q} \text{ soluția de mai sus este validă.}$$

$$(c) \quad 3a + 2b = (21 + 26)t = 47t = 94 \Rightarrow \boxed{t = 2} \Rightarrow \boxed{(a, b) = (14, 26)}.$$

$$(d) \quad 5a - b = (35 - 13)t = 22t = 66 \Rightarrow \boxed{t = 3} \Rightarrow \boxed{(a, b) = (21, 39)}.$$

Exercițiul 7. Fie relația $\frac{a}{4} = \frac{b}{5} = \frac{c}{6}$.

- (a) Arătați că $a + c$ este pătrat perfect dacă $a + b + c = 126$.
- (b) Determinați a , b și c , știind că $a + b + c = 90$.

Rezolvare:

Notăm valoarea comună k : $a = 4k$, $b = 5k$, $c = 6k$.

(a) Din $a + b + c = 126$ rezultă $15k = 126 \Rightarrow k = \frac{126}{15} = \frac{42}{5}$. Atunci

$a + c = 4k + 6k = 10k = 10 \cdot \frac{42}{5} = \boxed{84}$. *84 nu este pătrat perfect; deci, cu datele de mai sus, afirmația nu este adevărată. Probabil enunțul corect era cu altă sumă (de ex. $a + b + c = 150 \Rightarrow k = 10 \Rightarrow a + c = 100 = 10^2$).*

(b) $a + b + c = 90 \Rightarrow 15k = 90 \Rightarrow k = 6$. $\Rightarrow \boxed{a = 24, b = 30, c = 36}$.

Exercițiul 8. Fie șirul de rapoarte egale $\frac{2x-1}{3} = \frac{4x+1}{6} = \frac{x+2}{2}$. Verificați dacă acest șir este corect și determinați valoarea lui x .

Rezolvare:

Verificăm primele două rapoarte:

$$\frac{2x-1}{3} = \frac{4x+1}{6} \Rightarrow 6(2x-1) = 3(4x+1) \Rightarrow 12x-6 = 12x+3 \Rightarrow -6=3,$$

contradicție.

$\Rightarrow$ **Nu există** niciun x care să facă $\frac{2x-1}{3} = \frac{4x+1}{6}$; șirul nu este corect.

Succes!