

Lecția 4 – Metoda triunghiurilor congruente

Clasa a 6-a – Capitolul 2 – Triunghiul. Congruența triunghiurilor

Instrucțiuni

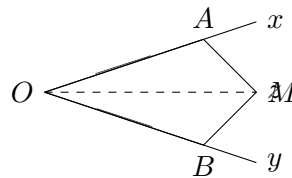
Utilizați congruența triunghiurilor pentru a demonstra egalitatea unor segmente sau a unor unghiuri. *Metoda:*

1. Identificați două triunghiuri care conțin elementele cerute.
2. Demonstrați că triunghiurile sunt congruente (L.U.L., U.L.U., L.L.L.).
3. Concluzionați că elementele omoloage (laturi sau unghiuri) sunt congruente.

Durata recomandată: **50 minute**.

Exerciții

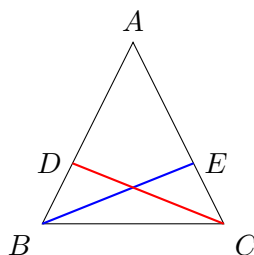
Exercițiul 1. Se consideră unghiul $\angle xOy$ și Oz bisectoarea sa. Pe laturile Ox și Oy se iau punctele A și B astfel încât $OA = OB$, iar pe bisectoarea Oz se ia un punct M . Demonstrați că $MA = MB$.



Exercițiul 2. Fie segmentul AB și O mijlocul său. Prin O trece o dreaptă d care intersectează segmentele paralele AC și BD (C și D sunt de o parte și de alta a lui AB , astfel încât $\angle CAB \equiv \angle DBA$). Demonstrați că $AC = BD$.

Exercițiul 3. Se dă triunghiul isoscel ABC cu $AB = AC$. Fie M mijlocul laturii BC . Demonstrați că $\angle BAM \equiv \angle CAM$ (adică AM este și bisectoarea unghiului A).

Exercițiul 4. Fie triunghiul ABC isoscel ($AB = AC$). Pe laturile AB și AC se iau punctele D , respectiv E , astfel încât $AD = AE$. Demonstrați că $BE = CD$.



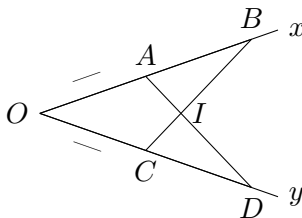
Exercițiul 5. Fie $ABCD$ un patrulater în care laturile opuse sunt egale: $AB = CD$ și $AD = BC$. Demonstrați că $AB \parallel CD$.

Exercițiul 6. Se consideră două cercuri concentrice (au același centru O). Prin centrul O se duc două drepte distincte care intersectează cercul mic în A, B și cercul mare în C, D . Demonstrați că $AD = BC$.

Exercițiul 7. Pe laturile unghiului $\angle xOy$ se consideră punctele $A, B \in Ox$ și $C, D \in Oy$ astfel încât $OA = OC$ și $OB = OD$. (Ordinea este $O - A - B$ și $O - C - D$). Fie I punctul de intersecție al segmentelor AD și BC . Demonstrați că:

(a) $\triangle OAD \equiv \triangle OCB$.

(b) $\triangle IAB \equiv \triangle ICD$.



Exercițiul 8. Fie triunghiul ABC . Fie M mijlocul laturii AC . Pe prelungirea segmentului BM se ia punctul D astfel încât $BM = MD$.

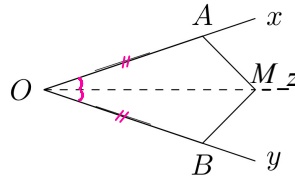
(a) Demonstrați că $AB = CD$.

(b) Demonstrați că $AB \parallel CD$.

(c) Dacă $m(\angle BAC) = 90^\circ$, arătați că și $m(\angle ACD) = 90^\circ$.

Succes!

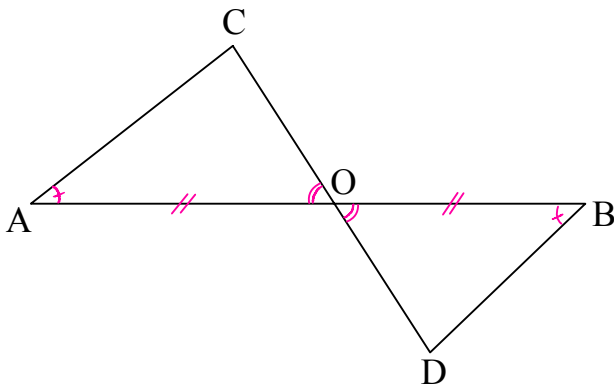
Exercițiul 1. Se consideră unghiul $\angle xOy$ și Oz bisectoarea sa. Pe laturile Ox și Oy se iau punctele A și B astfel încât $OA = OB$, iar pe bisectoarea Oz se ia un punct M . Demonstrați că $MA = MB$.



$$\angle OM \text{ bis } \angle AOB \Rightarrow \hat{AOM} \equiv \hat{MOB}$$

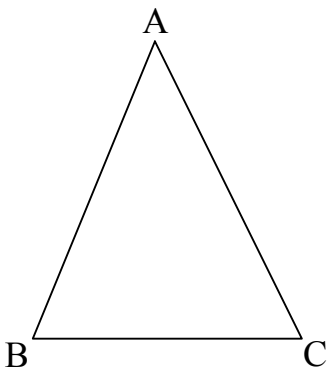
$$\left. \begin{array}{l} \triangle AOM \\ \triangle BOM \end{array} \right\} \begin{array}{l} OA = OB \\ \hat{AOM} \equiv \hat{MOB} \\ OM - \text{latură comună} \end{array} \xRightarrow{LVL} \triangle AOM \equiv \triangle BOM (LVL) \Rightarrow MA = MB$$

Exercițiul 2. Fie segmentul AB și O mijlocul său. Prin O trece o dreaptă d care intersectează segmentele paralele AC și BD (C și D sunt de o parte și de alta a lui AB , astfel încât $\angle CAB \equiv \angle DBA$). Demonstrați că $AC = BD$.



$$\left. \begin{array}{l} \triangle AOC \\ \triangle BOD \end{array} \right\} \begin{array}{l} \angle CAO \equiv \angle DBO \\ AO = BO \text{ (O mijlocul } [AB]) \\ \angle AOC \equiv \angle BOD \text{ (opuse la vârf)} \end{array} \xRightarrow{ULU} \triangle AOC \equiv \triangle BOD \Rightarrow AC = BD$$

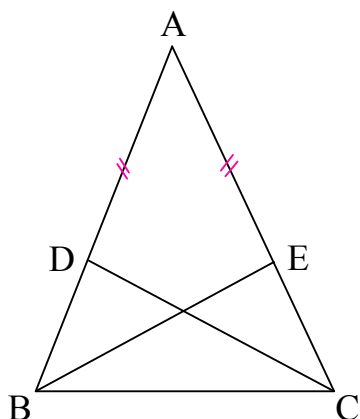
Exercițiul 3. Se dă triunghiul isoscel ABC cu $AB = AC$. Fie M mijlocul laturii BC . Demonstrați că $\angle BAM \equiv \angle CAM$ (adică AM este și bisectoarea unghiului A).



$$\begin{array}{l} \triangle ABC \text{ isoscel} \Rightarrow AB = AC \\ M \text{ mijlocul } [BC] \Rightarrow BM = MC \end{array}$$

$$\left. \begin{array}{l} \triangle ABM \\ \triangle ACM \end{array} \right\} \begin{array}{l} AB = AC \\ BM = MC \\ AM - \text{latură comună} \end{array} \xRightarrow{LLL} \triangle ABM \equiv \triangle ACM \Rightarrow \angle BAM \equiv \angle CAM$$

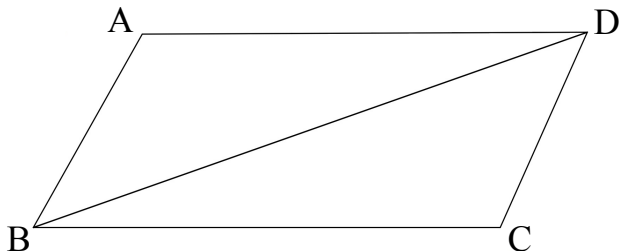
Exercițiul 4. Fie triunghiul ABC isoscel ($AB = AC$). Pe laturile AB și AC se iau punctele D , respectiv E , astfel încât $AD = AE$. Demonstrați că $BE = CD$.



$\triangle ABC$ isoscel $\Rightarrow AB = AC$

$$\left. \begin{array}{l} \triangle ABE \\ \triangle ACD \end{array} \right\} \begin{array}{l} AB = AC \\ \sphericalangle A - \text{unghi comun} \\ AE = AD \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l} \triangle ABE \\ \triangle ACD \end{array}} \right\} \begin{array}{l} \text{L.U.L.} \\ \Rightarrow \triangle ABE \equiv \triangle ACD \\ \Rightarrow BE = CD \end{array}$$

Exercițiul 5. Fie $ABCD$ un patrulater în care laturile opuse sunt egale: $AB = CD$ și $AD = BC$. Demonstrați că $AB \parallel CD$.

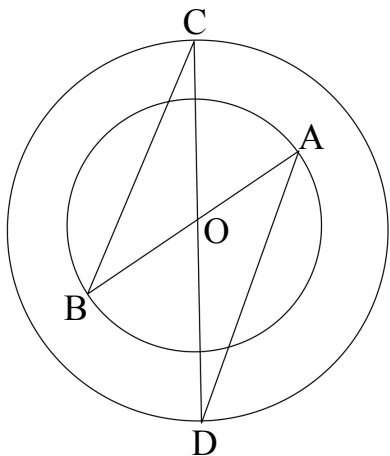


Unim punctele B și D.

$$\left. \begin{array}{l} \triangle ABD \\ \triangle CDB \end{array} \right\} \begin{array}{l} AB = CD \\ AD = BC \\ BD - \text{latură} \\ \text{comună} \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l} \triangle ABD \\ \triangle CDB \end{array}} \right\} \begin{array}{l} \text{LLL} \\ \Rightarrow \\ \triangle ABD \equiv \triangle CDB \end{array}$$

$\Rightarrow \sphericalangle ABD \equiv \sphericalangle CDB$ care au poziție de unghieri alterne interne pentru dreptele AB și CD tăiate de secanta BD
 $\Rightarrow AB \parallel CD$

Exercițiul 6. Se consideră două cercuri concentrice (au același centru O). Prin centrul O se duc două drepte distincte care intersectează cercul mic în A, B și cercul mare în C, D . Demonstrați că $AD = BC$.

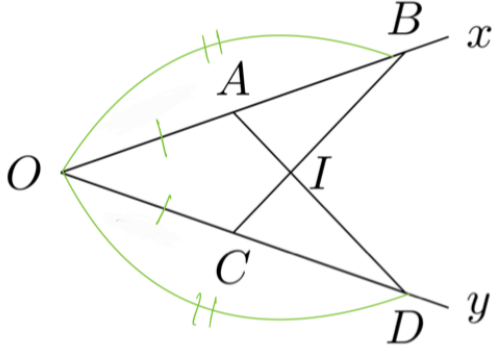


$$\left. \begin{array}{l} \triangle AOD \\ \triangle BOC \end{array} \right\} \begin{array}{l} AO = BO \text{ (raze în cercul mic)} \\ DO = CO \text{ (raze în cercul mare)} \\ \hat{BOC} = \hat{AOD} \text{ (opuse la vîrf)} \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l} \triangle AOD \\ \triangle BOC \end{array}} \right\} \begin{array}{l} \text{L.U.L.} \\ \Rightarrow \end{array}$$

$$\triangle AOD \equiv \triangle BOC \Rightarrow AD = BC$$

Exercițiul 7. Pe laturile unghiului $\angle xOy$ se consideră punctele $A, B \in Ox$ și $C, D \in Oy$ astfel încât $OA = OC$ și $OB = OD$. (Ordinea este $O - A - B$ și $O - C - D$). Fie I punctul de intersecție al segmentelor AD și BC . Demonstrați că:

- (a) $\triangle OAD \equiv \triangle OCB$.
 (b) $\triangle IAB \equiv \triangle ICD$.



$$a) \left. \begin{array}{l} \triangle OAD \\ \triangle OCB \end{array} \right\} \begin{array}{l} OA = OC \\ OD = OB \\ \angle O - \text{unghi comun} \end{array} \left. \begin{array}{l} \text{LUL} \\ \implies \end{array} \right\} \triangle OAD \equiv \triangle OCB$$

$$b) \left. \begin{array}{l} AB = OB - OA \\ CD = OD - OC \\ OB = OD \\ OA = OC \end{array} \right\} \implies AB = CD$$

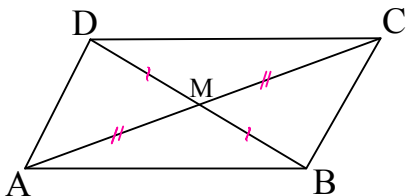
$$\triangle OAD \equiv \triangle OCB \implies \hat{O}A = \hat{O}B \implies \hat{C}DI = \hat{ABI}$$

$$\left. \begin{array}{l} \implies \hat{O}AD = \hat{O}CB \\ \hat{I}AB = 180^\circ - \hat{O}AD \\ \hat{I}CD = 180^\circ - \hat{O}CB \end{array} \right\} \implies \hat{I}AB = \hat{I}CD$$

$$\left. \begin{array}{l} \triangle IAB \\ \triangle ICD \end{array} \right\} \begin{array}{l} \hat{I}AB = \hat{I}CD \\ AB = CD \\ \hat{ABI} = \hat{CDI} \end{array} \left. \begin{array}{l} \text{ULU} \\ \implies \end{array} \right\} \triangle IAB \equiv \triangle ICD$$

Exercițiul 8. Fie triunghiul ABC . Fie M mijlocul laturii AC . Pe prelungirea segmentului BM se ia punctul D astfel încât $BM = MD$.

- (a) Demonstrați că $AB = CD$.
 (b) Demonstrați că $AB \parallel CD$.
 (c) Dacă $m(\angle BAC) = 90^\circ$, arătați că și $m(\angle ACD) = 90^\circ$.



$$a) M \text{ mijlocul } [AC] \implies AM = MC$$

$$\left. \begin{array}{l} \triangle AMB \\ \triangle CMD \end{array} \right\} \begin{array}{l} AM = MC \\ \angle AMB = \angle CMD \text{ (opuse la vârf)} \\ BM = MD \end{array} \left. \begin{array}{l} \text{LUL} \\ \implies \end{array} \right\} \triangle AMB \equiv \triangle CMD \implies AB = CD$$

b) $\triangle AMB \equiv \triangle CMD \implies \angle BAM = \angle DCM$ care au poziție de alternate interne pentru dreptele AB și CD tăiate de secanta $BD \implies AB \parallel CD$

c) De la subpunctul b) avem: $\angle BAM = \angle DCM \implies \angle BAC = \angle DCA$
 $\implies \angle BAC = 90^\circ \implies \angle DCA = 90^\circ$