

Rezolvare - Fișă de lucru

Lecția 3 - Mulțimi finite și infinite. Cardinalul unei mulțimi

Clasa a 6-a – Capitolul 1 - Mulțimi

Exercițiul 1. Scrie mulțimile divizorilor și multiplii lui 4, 6 și 9.

Rezolvare:

$$D_4 = \{1, 2, 4\} \text{ (finită)}, \quad D_6 = \{1, 2, 3, 6\} \text{ (finită)}, \quad D_9 = \{1, 3, 9\} \text{ (finită)}.$$

$$M_4 = \{0, 4, 8, 12, 16, \dots\}, \quad M_6 = \{0, 6, 12, 18, \dots\}, \quad M_9 = \{0, 9, 18, 27, \dots\} \text{ (toate infinite)}.$$

Am inclus 0 deoarece 0 este multiplu al oricărui număr.

Exercițiul 2. Fie $A = \{0, 1, 3\}$. Scrie cardinalul mulțimii A și apoi dă alte două exemple de mulțimi cu același cardinal.

Rezolvare: Mulțimea A are 3 elemente, deci $|A| = 3$. Exemple de mulțimi cu același cardinal:

$$\{2, 4, 6\}, \quad \{a, b, c\}.$$

Exercițiul 3. Determină valoarea de adevăr a următoarelor propoziții:

(a) $D_6 \subset D_{20}$

Rezolvare: $D_6 = \{1, 2, 3, 6\}$, $D_{20} = \{1, 2, 4, 5, 10, 20\}$. Elementul $3 \in D_6$ nu se află în D_{20} , deci propoziția este **Falsă**.

(b) $M_4 \subset M_6$

Rezolvare: $4 \in M_4$, dar $4 \notin M_6$. Deci propoziția este **Falsă**.

(c) $D_{12} = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$

Rezolvare: Toți divizorii lui 12 sunt exact $\{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$. Propoziția este **Adevărată**.

Exercițiul 4. Fie $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x + 2 \in M_6\}$. Scrie elementele mulțimii A .

Rezolvare: Multiplii lui 6 sunt $\{6, 12, 18, 24, 30, \dots\}$. Dacă $x + 2$ este unul dintre acești multipli, atunci scădem 2 din fiecare:

$$x + 2 \in \{6, 12, 18, 24, 30, \dots\} \Rightarrow x \in \{4, 10, 16, 22, 28, \dots\}.$$

Deci mulțimea A este $\boxed{\{4, 10, 16, 22, 28, \dots\}}$. În general, $x = 6k - 2$ cu $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 1$.

Exercițiul 5. Determină mulțimile:

(a) $A = \{x \in \mathbb{N} \mid 2x + 3 = 15\}$

Rezolvare: $2x + 3 = 15 \Rightarrow 2x = 12 \Rightarrow x = 6$. Deci $A = \{6\}$.

(b) $B = \{x \in \mathbb{N} \mid 3x + 1 \in D_{125}\}$

Rezolvare: $D_{125} = \{1, 5, 25, 125\}$. Rezolvăm $3x + 1 \in \{1, 5, 25, 125\}$:

$$3x + 1 = 1 \Rightarrow x = 0, \quad 3x + 1 = 5 \Rightarrow x = \frac{4}{3} \text{ (nu e în } \mathbb{N}),$$

$$3x + 1 = 25 \Rightarrow x = 8, \quad 3x + 1 = 125 \Rightarrow x = \frac{124}{3} \text{ (nu e în } \mathbb{N}).$$

Așadar $B = \{0, 8\}$.

Exercițiul 6. Scrie toate valorile lui $x \in \mathbb{N}$ pentru care $x + 1$ divide pe $x + 7$.

Rezolvare: Observăm că $x + 7 = (x + 1) + 6$. Dacă $x + 1 \mid x + 7$, atunci $x + 1$ divide și diferența $x + 1 \mid (x + 7) - (x + 1)$, adică $x + 1 \mid 6$. Deci

$$x + 1 \in D_6 = \{1, 2, 3, 6\} \Rightarrow x \in \{0, 1, 2, 5\}.$$

Exercițiul 7. Fie $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x < 45 \text{ și } 3 \mid x\}$. Scrie elementele și cardinalul lui A .

Rezolvare: Sunt multiplii lui 3 mai mici decât 45:

$$A = \{0, 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30, 33, 36, 39, 42\}.$$

Numărul lor este 15 (de la $0 = 3 \cdot 0$ până la $42 = 3 \cdot 14$).