



Fișă de lucru

Lecția 3 – Cel mai mic multiplu comun (c.m.m.m.c.)

Clasa a 6-a – Capitolul 2

Instrucțiuni

Rezolvă exercițiile de mai jos folosind descompunerea în factori primi și regulile de calcul ale c.m.m.m.c. (notație: $[a, b, \dots]$). Durata recomandată: **30–40 de minute**.

Exerciții

Exercițiul 1. Calculează c.m.m.m.c. pentru următoarele perechi de numere:

- (a) (3, 4) (b) (5, 8) (c) (18, 24) (d) (27, 45) (e) (72, 48) (f) (10, 15)

Rezolvare:

(a) $3 = 3, \quad 4 = 2^2$

$$[3, 4] = 2^2 \cdot 3 = 12.$$

(b) $5 = 5, \quad 8 = 2^3$

$$[5, 8] = 2^3 \cdot 5 = 40.$$

(c) $18 = 2 \cdot 3^2, \quad 24 = 2^3 \cdot 3$

$$[18, 24] = 2^{\max(1,3)} \cdot 3^{\max(2,1)} = 2^3 \cdot 3^2 = 72.$$

(d) $27 = 3^3, \quad 45 = 3^2 \cdot 5$

$$[27, 45] = 3^{\max(3,2)} \cdot 5^{\max(0,1)} = 3^3 \cdot 5 = 135.$$

(e) $72 = 2^3 \cdot 3^2, \quad 48 = 2^4 \cdot 3$

$$[72, 48] = 2^{\max(3,4)} \cdot 3^{\max(2,1)} = 2^4 \cdot 3^2 = 144.$$

$$(f) \quad 10 = 2 \cdot 5, \quad 15 = 3 \cdot 5$$

$$[10, 15] = 2 \cdot 3 \cdot 5 = 30.$$

Exercițiul 2. Calculează c.m.m.m.c. pentru următoarele grupuri de numere:

a) 24, 48, 72

b) 90, 100, 300

c) 180, 320, 432

d) 135, 270, 588

Rezolvare:

$$(a) \quad 24 = 2^3 \cdot 3, \quad 48 = 2^4 \cdot 3, \quad 72 = 2^3 \cdot 3^2$$

$$[24, 48, 72] = 2^{\max(3,4,3)} \cdot 3^{\max(1,1,2)} = 2^4 \cdot 3^2 = 144.$$

$$(b) \quad 90 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5, \quad 100 = 2^2 \cdot 5^2, \quad 300 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5^2$$

$$[90, 100, 300] = 2^{\max(1,2,2)} \cdot 3^{\max(2,0,1)} \cdot 5^{\max(1,2,2)} = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 = 900.$$

$$(c) \quad 180 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5, \quad 320 = 2^6 \cdot 5, \quad 432 = 2^4 \cdot 3^3$$

$$[180, 320, 432] = 2^{\max(2,6,4)} \cdot 3^{\max(2,0,3)} \cdot 5^{\max(1,1,0)} = 2^6 \cdot 3^3 \cdot 5 = 8640.$$

$$(d) \quad 135 = 3^3 \cdot 5, \quad 270 = 2 \cdot 3^3 \cdot 5, \quad 588 = 2^2 \cdot 3 \cdot 7^2$$

$$[135, 270, 588] = 2^{\max(0,1,2)} \cdot 3^{\max(3,3,1)} \cdot 5^{\max(1,1,0)} \cdot 7^{\max(0,0,2)} = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7^2 = 26460.$$

Exercițiul 3. Fie a și b două numere naturale. Determină a și b în fiecare caz:

a) $(a, b) = 48, [a, b] = 144$

b) $(a, b) = 231, [a, b] = 693$

c) $(a, b) = 48, a \cdot b = 6912$

d) $[a, b] = 144, a \cdot b = 6912$

Rezolvare:

Idee-cheie: pentru $a, b \in \mathbb{N}$, $a \cdot b = (a, b) \cdot [a, b]$.

$$a) \text{ Notăm } a = 48m, \quad b = 48n \text{ cu } (m, n) = 1 \text{ și } mn = \frac{[a, b]}{(a, b)} = \frac{144}{48} = 3.$$

Perechi posibile (m, n) : $(1, 3)$ sau $(3, 1)$.

$$\Rightarrow (a, b) \in \{(48, 144), (144, 48)\}.$$

b) Similar, $a = 231m$, $b = 231n$, $(m, n) = 1$, $mn = \frac{693}{231} = 3$.

$$\Rightarrow (a, b) \in \{(231, 693), (693, 231)\}.$$

c) Din relația produsului: $[a, b] = \frac{a \cdot b}{(a, b)} = \frac{6912}{48} = 144$. Revine cazul (a).

$$\Rightarrow (a, b) \in \{(48, 144), (144, 48)\}.$$

d) $(a, b) = \frac{a \cdot b}{[a, b]} = \frac{6912}{144} = 48$. Revine cazul (a).

$$\Rightarrow (a, b) \in \{(48, 144), (144, 48)\}.$$

Exercițiul 4. Calculează c.m.m.m.c. pentru:

a) 8, 12, 924

b) 2715, 345

Rezolvare:

a) $[8, 12, 924] = 2^3 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 11 = 1848$.

b) $2715 = 3 \cdot 5 \cdot 181$, $345 = 3 \cdot 5 \cdot 23$.

$$[2715, 345] = 3 \cdot 5 \cdot 23 \cdot 181 = 62445.$$

Exercițiul 5. Pentru următoarele seturi de numere, calculează și c.m.m.d.c., și c.m.m.m.c.:

a) 48, 144

b) 372, 360, 900

Rezolvare:

a) $(48, 144) = 48$, $[48, 144] = 144$.

b) $372 = 2^2 \cdot 3 \cdot 31$, $360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$, $900 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2$.

$$(372, 360, 900) = 2^{\min(2,3,2)} \cdot 3^{\min(1,2,2)} = 2^2 \cdot 3 = 12.$$

$$[372, 360, 900] = 2^{\max(2,3,2)} \cdot 3^{\max(1,2,2)} \cdot 5^{\max(0,1,2)} \cdot 31 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 31 = 55800.$$

Exercițiul 6. Demonstrează:

a) Produsul a două numere naturale consecutive este divizibil cu $2 \in \mathbb{N}$.

b) Produsul a patru numere consecutive este divizibil cu 24.

Rezolvare:

a) Fie $n \in \mathbb{N}$. Din două numere consecutive n și $n + 1$, unul este par.
 $\Rightarrow n(n + 1)$ este multiplu de 2.

b) În patru numere consecutive $n, n + 1, n + 2, n + 3$:

- există exact două numere pare; dintre ele, unul este multiplu de 4 $\Rightarrow$ produsul are factor $2^3 = 8$;
- cel puțin unul este multiplu de 3 $\Rightarrow$ produsul are factor 3.

Prin urmare, produsul este multiplu de $8 \cdot 3 = 24$.

Exercițiul 7. Rezolvă următoarele probleme cu rest:

- a) Care este cel mai mic număr de 3 cifre care împărțit la 6, 10 și 12 dă restul 3?
- b) Află cel mai mic număr care împărțit la 6 dă restul 5, iar împărțit la 5 dă restul 4.

Rezolvare:

a) Fie N numărul căutat. Condițiile „dă restul 3” se scriu, prin teorema împărțirii cu rest:

$$N = 6q_1 + 3, \quad N = 10q_2 + 3, \quad N = 12q_3 + 3.$$

Deci $N - 3$ este multiplu comun al lui 6, 10, 12. Cel mai mic multiplu comun al lui 6, 10, 12 este 60, așadar

$$N - 3 = 60k \Rightarrow N = 3 + 60k.$$

Pentru cel mai mic număr de 3 cifre alegem cel mai mic k cu $N \geq 100$:
 $k = 2 \Rightarrow N = 3 + 120 = \boxed{123}$.

b) Scriem condițiile cu rest:

$$N = 6q + 5 \quad \text{și} \quad N = 5r + 4.$$

Din prima urmează $N + 1 = 6q + 6$, deci $N + 1$ este multiplu de 6; din a doua urmează $N + 1 = 5r + 5$, deci $N + 1$ este multiplu de 5. Prin urmare, $N + 1$ este multiplu comun al lui 6 și 5. Cel mai mic astfel de multiplu este 30,

$$N + 1 = 30 \Rightarrow N = \boxed{29}.$$

Succes!