



Rezolvare - Fișă de lucru

Lecția 2 - Relații între mulțimi

Clasa a 6-a – Capitolul 1 - Mulțimi

Exercițiul 1. Scrie toate submulțimile mulțimii $A = \{1, 2\}$.

Rezolvare: O mulțime cu 2 elemente are $2^2 = 4$ submulțimi. Acestea sunt:

$$\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}.$$

Regulă generală: o mulțime cu n elemente are 2^n submulțimi (inclusiv mulțimea vidă și mulțimea însăși).

Exercițiul 2. Dă patru exemple de submulțimi ale mulțimii numerelor naturale $\mathbb{N}$.

Rezolvare: Exemple corecte (toate incluse în $\mathbb{N}$):

$$\{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ este par}\}, \quad \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ este impar}\},$$

$$\{n \in \mathbb{N} \mid 5 \mid n\} \text{ (multiplii lui 5)}, \quad \{n \in \mathbb{N} \mid n = k^2, k \in \mathbb{N}\} \text{ (pătratele perfecte)}.$$

Se pot oferi și exemple finite, de tipul $\{0, 1, 2, 3\}$ sau $\{7\}$.

Exercițiul 3. Fie $M = \{11, 21, 31, \dots, 91\}$.

(a) Află cardinalul mulțimii M .

Rezolvare: Observăm un șir aritmetic: 11, 21, 31, ..., 91 cu pas 10.

Termenul general: $11 + 10k$. Pentru $k = 0$ avem 11, iar pentru $k = 8$ avem 91. Deci sunt $8 - 0 + 1 = 9$ termeni, astfel $|M| = 9$.

(b) Scrie trei submulțimi ale lui M formate din câte 4 elemente.

Rezolvare: Exemple (fiecare cu 4 elemente din M):

$$\{11, 21, 31, 41\}, \quad \{21, 41, 61, 81\}, \quad \{31, 51, 71, 91\}.$$

Orice alegere de 4 elemente distincte din M este corectă.

Exercițiul 4. Fie $M = \{0, 1, 6\}$. Scrie toate submulțimile mulțimii M și află cardinalul acesteia.

Rezolvare: Mulțimea M are 3 elemente, deci $2^3 = 8$ submulțimi:

$$\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{6\}, \{0, 1\}, \{0, 6\}, \{1, 6\}, \{0, 1, 6\}.$$

Cardinalul mulțimii $\mathcal{P}(M)$ (mulțimea părților) este 8.

Exercițiul 5. Fie $M = \{x \mid x \text{ este cifră pară}\}$. Scrie patru mulțimi care includ mulțimea M .

Rezolvare: Întrucât $M = \{0, 2, 4, 6, 8\}$, patru mulțimi care o includ (adică $M \subseteq \cdot$) sunt, de exemplu:

$$\{0, 2, 4, 6, 8, 10, 12\}, \quad \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\},$$

$$\{x \in \mathbb{Z} \mid x \text{ este par}\}, \quad \mathbb{Z}.$$

Exercițiul 6. Determină valorile lui x pentru care mulțimea $\{2, 3, x\}$ este inclusă în $\{1, 2, 3, 4\}$.

Rezolvare: Condiția $\{2, 3, x\} \subseteq \{1, 2, 3, 4\}$ impune ca x să fie element al mulțimii din dreapta. Prin urmare,

$$x \in \{1, 2, 3, 4\}.$$

Faptul că un element poate coincide cu unul existent nu e o problemă:
 $\{2, 3, 2\} = \{2, 3\}$, care este tot submulțime a $\{1, 2, 3, 4\}$.

Exercițiul 7. Fie $A = \{x \in \mathbb{N} \mid 4 \leq x \leq 7\}$, $B = \{y \mid y = x + 2, x \in A\}$, $C = \{z \mid z = 2x, x \in A\}$. Scrie elementele mulțimilor A , B și C .

Rezolvare:

$$A = \{4, 5, 6, 7\}.$$

Pentru B : $y = x + 2$ cu $x \in A \Rightarrow B = \{6, 7, 8, 9\}$. Pentru C : $z = 2x$ cu $x \in A \Rightarrow C = \{8, 10, 12, 14\}$.

Exercițiul 8. Se dă mulțimea $A = \{1, 2, 3, \dots, 2022\}$. Determină numărul submulțimilor formate din câte două elemente.

Rezolvare (metoda sumei lui Gauss, explicată simplu): Vrem să numărăm toate perechile de două numere din mulțimea $\{1, 2, \dots, 2022\}$, fără să repetăm.

Începem ordonat:

$$\underbrace{(1, 2), (1, 3), (1, 4), \dots, (1, 2022)}_{2021 \text{ perechi}}$$

Apoi trecem la 2:

$$\underbrace{(2, 3), (2, 4), \dots, (2, 2022)}_{2020 \text{ perechi}}$$

Apoi la 3:

$$\underbrace{(3, 4), \dots, (3, 2022)}_{2019 \text{ perechi}}$$

... până la ultima:

$$\underbrace{(2021, 2022)}_{1 \text{ pereche}}.$$

De ce nu luăm, de exemplu, $(2, 1)$? Pentru că perechea $(1 \text{ cu } 2)$ este aceeași cu $(2 \text{ cu } 1)$; ordinea nu contează, deci nu repetăm.

În total obținem:

$$2021 + 2020 + 2019 + \dots + 1 = 1 + 2 + 3 + \dots + 2021.$$

Trucul lui Gauss: scriem suma o dată normal și o dată invers; fiecare pereche de termeni dă 2022, iar avem 2021 astfel de perechi:

$$\begin{aligned} S &= 1 + 2 + \dots + 2020 + 2021, \\ S &= 2021 + 2020 + \dots + 2 + 1 \\ \Rightarrow 2S &= 2021 \cdot 2022 \Rightarrow S = \frac{2021 \cdot 2022}{2} = 2\,043\,231. \end{aligned}$$

Deci numărul submulțimilor cu două elemente este $\boxed{2\,043\,231}$.

Felicitări!