



Fișă de lucru

Lecția 13 - Pătrate perfecte. Cuburi perfecte

Clasa a 5-a – Capitolul 1 - Operații cu numere naturale

Instrucțiuni

Încearcă să rezolvi toate exercițiile fără ajutor. Durata recomandată:
30–40 de minute.

Exerciții

Exercițiul 1. Pentru fiecare număr, bifează: *pătrat perfect* (PP), *cub perfect* (CP), *ambele* sau *niciuna*:

49, 81, 216, 512, 729, 1024, 2401, 2744.

Rezolvare:

$$49 = 7^2 \Rightarrow \text{PP.}$$

$$81 = 9^2 = 3^4 \Rightarrow \text{PP.}$$

$$216 = 6^3 \Rightarrow \text{CP.}$$

$$512 = 8^3 = 2^9 \Rightarrow \text{CP.}$$

$$729 = 27^2 = 9^3 = 3^6 \Rightarrow \text{ambele (PP și CP).}$$

$$1024 = 32^2 = 2^{10} \Rightarrow \text{PP.}$$

$$2401 = 49^2 = 7^4 \Rightarrow \text{PP.}$$

$$2744 = 14^3 = 2^3 \cdot 7^3 \Rightarrow \text{CP.}$$

Exercițiul 2. Fără a calcula rezultatul numeric, decide dacă **este pătrat perfect**, folosind descompunerea în factori primi (exponenți **pari**):

(a) $2^6 \cdot 3^4 \cdot 5^2$

(b) $2^7 \cdot 3^2$

(c) $2^2 \cdot 3^2 \cdot 7^2$

(d) $3^5 \cdot 5^2$

Rezolvare:

- (a) Toți exponenții sunt pari $\Rightarrow$ **DA**, pătrat perfect.
- (b) Exponentul 7 este impar $\Rightarrow$ **NU**, nu este pătrat perfect.
- (c) Toți exponenții sunt pari $\Rightarrow$ **DA**, pătrat perfect.
- (d) Exponentul 5 este impar $\Rightarrow$ **NU**, nu este pătrat perfect.

Exercițiul 3. Verifică dacă numerele sunt **cuburi perfecte**, argumentând prin exponenți multipli de 3:

- (a) $2^6 \cdot 3^3$
- (b) $2^4 \cdot 3^2 \cdot 5$
- (c) $3^9 \cdot 5^3$
- (d) $2^8 \cdot 7^6$

Rezolvare:

- (a) 6 și 3 sunt multipli de 3 $\Rightarrow$ **DA**, cub perfect.
- (b) Exponenții 4, 2, 1 nu sunt toți multipli de 3 $\Rightarrow$ **NU**.
- (c) 9 și 3 sunt multipli de 3 $\Rightarrow$ **DA**, cub perfect.
- (d) 8 nu este multiplu de 3 (deși 6 este) $\Rightarrow$ **NU**.

Exercițiul 4. Încadrează fiecare număr între **două pătrate perfecte consecutive** și spune dacă este sau nu pătrat perfect:

- (a) 115
- (b) 430
- (c) 870
- (d) 50

Rezolvare:

- (a) $10^2 = 100 < 115 < 121 = 11^2 \Rightarrow$ **nu** este pătrat perfect.
- (b) $20^2 = 400 < 430 < 441 = 21^2 \Rightarrow$ **nu**.
- (c) $29^2 = 841 < 870 < 900 = 30^2 \Rightarrow$ **nu**.
- (d) $7^2 = 49 < 50 < 64 = 8^2 \Rightarrow$ **nu**.

Exercițiul 5. Determină **cel mai mic** $k \in N$ astfel încât $N \cdot k$ să fie: (i) pătrat perfect; (ii) cub perfect.

- (a) $N = 90$
- (b) $N = 200$

(c) $N = 2^4 \cdot 3 \cdot 7^2$

Rezolvare:

Regulă: pentru PP — toți exponenții pari; pentru CP — toți exponenții multipli de 3.

(a) $90 = 2^1 \cdot 3^2 \cdot 5^1$.

(i) PP: completăm la exponenți pari $\Rightarrow k = 2^1 \cdot 5^1 = \boxed{10}$.

(ii) CP: completăm la multipli de 3 $\Rightarrow k = 2^2 \cdot 3^1 \cdot 5^2 = \boxed{300}$.

(b) $200 = 2^3 \cdot 5^2$.

(i) PP: completăm $2^3 \rightarrow 2^4 \Rightarrow k = 2^1 = \boxed{2}$.

(ii) CP: 2^3 e deja multiplu de 3, $5^2 \rightarrow 5^3 \Rightarrow k = 5^1 = \boxed{5}$.

(c) $N = 2^4 \cdot 3^1 \cdot 7^2$.

(i) PP: doar 3^1 trebuie completat $\Rightarrow k = 3^1 = \boxed{3}$.

(ii) CP: $2^4 \rightarrow 2^6$, $3^1 \rightarrow 3^3$, $7^2 \rightarrow 7^3 \Rightarrow k = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 7^1 = \boxed{252}$.

Exercițiul 6. Sume de numere impare:

(a) Calculează $1 + 3 + 5 + \dots + 41$ și spune ce observi.

(b) Găsește $n \in \mathbb{N}$ astfel încât $1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = 289$.

(c) Calculează suma tuturor numerelor impare de la 101 la 169 (inclusiv).

Rezolvare:

Fapt cunoscut: suma primelor n numere impare este n^2 (termenul n -lea este $2n - 1$).

(a) Ultimul termen $41 = 2 \cdot 21 - 1 \Rightarrow n = 21 \Rightarrow \boxed{21^2 = 441}$.

(b) $n^2 = 289 \Rightarrow n = \boxed{17}$.

(c) Imparele până la 169: au 85 termeni ($169 = 2 \cdot 85 - 1$) $\Rightarrow$ sumă 85^2 .

Imparele până la 99: au 50 termeni ($99 = 2 \cdot 50 - 1$) $\Rightarrow$ sumă 50^2 .

Rezultă $\boxed{85^2 - 50^2 = 7225 - 2500 = 4725}$.

Exercițiul 7. Aplicații:

(a) Un pătrat are aria 529 cm^2 . Determină latura și perimetrul.

(b) Perimetrul unui pătrat este 180 cm . Află latura și aria.

(c) Un cub are volumul 343 cm^3 . Determină lungimea muchiei.

(d) O cutie cubică cu muchia de 27 cm se umple cu cubulețe identice cu muchia de 3 cm . Câte cubulețe intră?

Rezolvare:

- (a) $l^2 = 529 \Rightarrow l = \sqrt{529} = 23$ cm; perimetru $P = 4l = 4 \cdot 23 = \boxed{92}$ cm.
 (b) $P = 4l = 180 \Rightarrow l = 45$ cm; aria $A = l^2 = 45^2 = \boxed{2025}$ cm².
 (c) $a^3 = 343 \Rightarrow a = \sqrt[3]{343} = 7$ cm.
 (d) Pe muchie încap $27 : 3 = 9$ cubulețe; total $\boxed{9^3 = 729}$.

Exercițiul 8. Alege metoda potrivită (*ultima cifră / factori primi / observații despre puteri*) și rezolvă:

- (a) Există pătrat perfect care se termină în **44**? Motivează răspunsul.
 (b) Determină **cel mai mic** pătrat perfect multiplu de 45.
 (c) Câte pătrate perfecte din intervalul $[1, 1000]$ sunt multipli de 4?
 (d) Care dintre numerele 99, 101, 117, 147 poate fi **diferența** a două pătrate perfecte consecutive?

Rezolvare:

- (a) **Da.** De exemplu $12^2 = 144$, $38^2 = 1444$, $62^2 = 3844$, $88^2 = 7744$.
 Explicație: $(10k + 2)^2 = 100k^2 + 40k + 4$ — ultimele două cifre depind de $40k + 4$, care poate fi 44 (când $40k$ se termină în 40).
 Similar, $(10k + 8)^2 = 100k^2 + 160k + 64$ — ultimele două cifre depind de $160k + 64$ și pot fi 44 (când $160k$ se termină în 80).
 (b) $45 = 3^2 \cdot 5$. Cel mai mic pătrat care conține și factorul 5 cu exponent par este $3^2 \cdot 5^2 = (3 \cdot 5)^2 = \boxed{225}$.
 (c) Un pătrat este multiplu de 4 $\Leftrightarrow$ este pătratul unui număr *par*.
 $\lfloor \sqrt{1000} \rfloor = 31$; dintre $1, 2, \dots, 31$ sunt 15 numere pare $\Rightarrow \boxed{15}$ astfel de pătrate.
 (d) Diferența pătratelor consecutive: $(n + 1)^2 - n^2 = 2n + 1$ (număr *impar*).
 Toate cele patru numere sunt impare $\Rightarrow$ toate sunt posibile.
 Exemple: $50^2 - 49^2 = 99$; $51^2 - 50^2 = 101$; $59^2 - 58^2 = 117$; $74^2 - 73^2 = 147$.

Exercițiul 9. Exercițiu suplimentar (explicat pas cu pas): Demonstrează și calculează suma

$$1 + 3 + 5 + \dots + 41.$$

Rezolvare:

Pasul 1. Observăm că termenii sunt numere impare consecutive: $1, 3, 5, \dots, 41$.

Pasul 2. Scriem termenul general ca $2n - 1$ și găsim câți termeni sunt până la 41:

$$2n - 1 = 41 \Rightarrow 2n = 42 \Rightarrow n = \boxed{21}. \text{ Deci în sumă sunt 21 termeni.}$$

Pasul 3. Grupăm termenii în perechi egale primul cu ultimul”, al doilea cu penultimul” etc.:

$$(1 + 41) + (3 + 39) + (5 + 37) + \cdots + (19 + 23) + 21.$$

Pasul 4. Fiecare pereche are aceeași sumă: $1 + 41 = 42$, $3 + 39 = 42$, $5 + 37 = 42$, ...

Pasul 5. Din 21 termeni rezultă 10 perechi și un termen la mijloc (21):

$$\underbrace{(1 + 41)}_{42} + \underbrace{(3 + 39)}_{42} + \cdots + \underbrace{(19 + 23)}_{42} + 21.$$

Pasul 6. Adunăm: 10 perechi $\Rightarrow 10 \cdot 42 = 420$, apoi adăugăm termenul din mijloc 21:

$$420 + 21 = \boxed{441}.$$

Explicație utilă: Dacă notăm suma primelor n impare prin S_n , atunci $S_1 = 1 = 1^2$, $S_2 = 1 + 3 = 4 = 2^2$, $S_3 = 1 + 3 + 5 = 9 = 3^2$.

Se observă regula $S_n = n^2$, deoarece $n^2 + (2n + 1) = (n + 1)^2$. Pentru $n = 21$, $S_{21} = 21^2 = 441$.

Succes!