

Rezolvare - Fișă de lucru

Lecția 1 – Descompunerea numerelor naturale în produs de puteri de numere prime

Clasa a 6-a – Capitolul 2 - Numere naturale

Exerciții

Exercițiul 1. Se consideră mulțimea $M = \{101, 102, \dots, 110\}$. Determină:

- A = mulțimea numerelor prime din M ;
- B = mulțimea numerelor compuse din M .

Rezolvare:

Verificăm pe rând (împărțim doar la primele numere prime posibile, până la $\sqrt{n}$):

101 – nu se divide la 2, 3, 5, 7	$\Rightarrow$ prim
$102 = 2 \cdot 51$	$\Rightarrow$ compus
103 – nu se divide la 2, 3, 5, 7	$\Rightarrow$ prim
$104 = 8 \cdot 13$	$\Rightarrow$ compus
$105 = 3 \cdot 5 \cdot 7$	$\Rightarrow$ compus
$106 = 2 \cdot 53$	$\Rightarrow$ compus
107 – nu se divide la 2, 3, 5, 7	$\Rightarrow$ prim
$108 = 2 \cdot 54$	$\Rightarrow$ compus
109 – nu se divide la 2, 3, 5, 7	$\Rightarrow$ prim
$110 = 2 \cdot 5 \cdot 11$	$\Rightarrow$ compus

$$A = \{101, 103, 107, 109\}, \quad B = \{102, 104, 105, 106, 108, 110\}.$$

Exercițiul 2. Verifică, folosind criterii de divizibilitate, dacă următoarele numere sunt prime:

- 109
- 113

- 961

Rezolvare:

109: *suma cifrelor* $= 1 + 0 + 9 = 10 \Rightarrow$ nu e divizibil cu 3; nu e par, nu se termină în 5; $7 \cdot 15 = 105$, $7 \cdot 16 = 112 \Rightarrow$ nu e divizibil cu 7. $\Rightarrow$ **prim**.

113: *suma cifrelor* $= 1 + 1 + 3 = 5 \Rightarrow$ nu e divizibil cu 3; nu e par, nu se termină în 5; $7 \cdot 16 = 112$, $7 \cdot 17 = 119 \Rightarrow$ nu e divizibil cu 7. $\Rightarrow$ **prim**.

961: observăm $31^2 = 961$. $\Rightarrow$ **compus**.

Exercițiul 3. Scrie mulțimea divizorilor proprii ai numerelor: 36, 45 și 202.

Rezolvare:

Divizorii proprii: toți divizorii pozitivi, mai puțin 1 și numărul însuși.

$$D_{36} = \{2, 3, 4, 6, 9, 12, 18\}, \quad D_{45} = \{3, 5, 9, 15\}, \quad D_{202} = \{2, 101\}.$$

Exercițiul 4. Determină cifra x astfel încât fiecare dintre numerele: $3x$, $4x$, $5x$, $9x$ să fie prime.

Rezolvare:

Observăm că $4x$ este mereu par și are două cifre (de la 40 la 49). Orice număr par mai mare decât 2 este compus.

$\Rightarrow$ nu există nicio cifră x pentru care toate $3x, 4x, 5x, 9x$ să fie prime.

Exercițiul 5. Descompune în factori primi următoarele numere și scrie rezultatul:

- 32, 27, 160, 450, 2250, 250

Rezolvare:

$$\begin{aligned} 32 &= 2^5, & 27 &= 3^3, & 160 &= 2^5 \cdot 5, \\ 450 &= 2 \cdot 3^2 \cdot 5^2, & 2250 &= 2 \cdot 3^2 \cdot 5^3, & 250 &= 2 \cdot 5^3. \end{aligned}$$

Exercițiul 6. Fie $A = 2^3 \cdot 3^5 \cdot 7$, $B = 2^4 \cdot 3 \cdot 7$, $C = 2^3 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 11$. Calculează:

- $A \cdot B, \quad A : B$
- $B \cdot C, \quad C : B$
- $A \cdot B \cdot C$

Rezolvare:

$$A \cdot B = 2^{3+4} \cdot 3^{5+1} \cdot 7^{1+1} = 2^7 \cdot 3^6 \cdot 7^2.$$

$$A : B = \frac{A}{B} = 2^{3-4} \cdot 3^{5-1} \cdot 7^{1-1} = \frac{3^4}{2} = \frac{81}{2}.$$

$$B \cdot C = 2^{4+3} \cdot 3^{1+1} \cdot 7^{1+1} \cdot 11 = 2^7 \cdot 3^2 \cdot 7^2 \cdot 11.$$

$$C : B = \frac{C}{B} = 2^{3-4} \cdot 3^{1-1} \cdot 7^{1-1} \cdot 11 = \frac{11}{2}.$$

$$A \cdot B \cdot C = 2^{3+4+3} \cdot 3^{5+1+1} \cdot 7^{1+1+1} \cdot 11 = 2^{10} \cdot 3^7 \cdot 7^3 \cdot 11.$$

Împărțirile rămân fracții deoarece factorii de 2 din numitor sunt mai mulți decât în numărător.

Exercițiul 7. Află numărul de divizori ai fiecărui număr de mai jos, folosind descompunerea în factori primi:

- 72, 90, 225

Rezolvare:

$$72 = 2^3 \cdot 3^2 \quad \Rightarrow \quad d(72) = (3+1)(2+1) = 12.$$

$$90 = 2^1 \cdot 3^2 \cdot 5^1 \quad \Rightarrow \quad d(90) = (1+1)(2+1)(1+1) = 12.$$

$$225 = 3^2 \cdot 5^2 \quad \Rightarrow \quad d(225) = (2+1)(2+1) = 9.$$

Formula generală: dacă $n = p_1^{\alpha_1} \cdots p_k^{\alpha_k}$, atunci $d(n) = (\alpha_1 + 1) \cdots (\alpha_k + 1)$.

Exercițiul 8. Se știe că produsul dintre un număr prim și un număr impar este 2354. Află cele două numere.

Rezolvare:

- 2354 este par $\Rightarrow$ numărul prim trebuie să fie 2.
- $2354 = 2 \cdot 1177$, iar 1177 este impar.

$\Rightarrow$ Cele două numere sunt 2 și 1177.

Felicitări!