



Fișă de lucru

Recapitulare – Divizibilitatea în $\mathbb{N}$

Clasa a 6-a – Capitolul 2

Instrucțiuni

Rezolvă exercițiile de recapitulare de mai jos, aplicând tot ce ai învățat în acest capitol despre divizibilitate, factori, multipli, c.m.m.d.c. și c.m.m.m.c.
Durata recomandată: **60-70 de minute**.

Exerciții

Exercițiul 1. Descompuneți în factori primi numerele date: 12, 75, 324, 600, 864, 1800, 19008

Rezolvare:

$$\begin{aligned}12 &= 2^2 \cdot 3, & 75 &= 3 \cdot 5^2, & 324 &= 2^2 \cdot 3^4, \\600 &= 2^3 \cdot 3 \cdot 5^2, & 864 &= 2^5 \cdot 3^3, & 1800 &= 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^2, \\19008 &= 2^6 \cdot 3^3 \cdot 11.\end{aligned}$$

Exercițiul 2. Scrieți numărul 70:

- (a) ca produs de 3 numere prime
- (b) ca produsul dintre un număr prim și un număr impar
- (c) ca produsul dintre un număr prim și un număr par

Rezolvare:

- (a) $70 = 2 \cdot 5 \cdot 7$.
- (b) $70 = 2 \cdot 35$ (2 prim, 35 impar).
- (c) $70 = 5 \cdot 14$ ($prim \cdot par$).

Exercițiul 3. Calculați cel mai mare divizor comun și cel mai mic multiplu comun al numerelor:

- | | |
|----------------|----------------------|
| (a) 48 și 60 | (f) 256 și 324 |
| (b) 54 și 72 | (g) 11, 44 și 66 |
| (c) 120 și 144 | (h) 1200, 360 și 450 |
| (d) 25 și 35 | (i) 108, 180 și 432 |
| (e) 150 și 225 | |

Rezolvare:

$$(a) \quad 48 = 2^4 \cdot 3, \quad 60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$$

$$(48, 60) = 2^{\min(4,2)} \cdot 3 = 12, \quad [48, 60] = \frac{48 \cdot 60}{12} = 240.$$

$$(b) \quad 54 = 2 \cdot 3^3, \quad 72 = 2^3 \cdot 3^2 \quad (54, 72) = 2 \cdot 3^2 = 18, \quad [54, 72] = \frac{54 \cdot 72}{18} = 216.$$

$$(c) \quad 120 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5, \quad 144 = 2^4 \cdot 3^2$$

$$(120, 144) = 2^3 \cdot 3 = 24, \quad [120, 144] = \frac{120 \cdot 144}{24} = 720.$$

$$(d) \quad 25 = 5^2, \quad 35 = 5 \cdot 7 \quad (25, 35) = 5, \quad [25, 35] = \frac{25 \cdot 35}{5} = 175.$$

$$(e) \quad 150 = 2 \cdot 3 \cdot 5^2, \quad 225 = 3^2 \cdot 5^2$$

$$(150, 225) = 3 \cdot 5^2 = 75, \quad [150, 225] = \frac{150 \cdot 225}{75} = 450.$$

$$(f) \quad 256 = 2^8, \quad 324 = 2^2 \cdot 3^4 \quad (256, 324) = 2^2 = 4, \quad [256, 324] = 2^8 \cdot 3^4 = 20736.$$

$$(g) \quad 11, \quad 44 = 11 \cdot 4, \quad 66 = 11 \cdot 6 \quad (11, 44, 66) = 11, \quad [11, 44, 66] = 132.$$

$$(h) \quad 1200 = 2^4 \cdot 3 \cdot 5^2, \quad 360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5, \quad 450 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5^2$$

$$(1200, 360, 450) = 2^1 \cdot 3^1 \cdot 5^1 = 30, \quad [1200, 360, 450] = 3600.$$

$$(i) \quad 108 = 2^2 \cdot 3^3, \quad 180 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5, \quad 432 = 2^4 \cdot 3^3$$

$$(108, 180, 432) = 2^2 \cdot 3^2 = 36, \quad [108, 180, 432] = 2160.$$

Exercițiul 4. Cu numerele 4, 5, 6, 9, 13 formați perechi de numere relativ prime.

Rezolvare:

Verificăm pe rând (perechi neordonate):

$$\underbrace{(4, 5), (4, 9), (4, 13)}, \quad (4, 6) \text{ nu,}$$

prime între ele

$$\underbrace{(5, 6), (5, 9), (5, 13),}_{\text{prime între ele}}$$

$$(6, 9) \text{ nu, } \underbrace{(6, 13), (9, 13)}_{\text{prime între ele}}.$$

Toate perechile coprime:

$$\{(4, 5), (4, 9), (4, 13), (5, 6), (5, 9), (5, 13), (6, 13), (9, 13)\}.$$

Exercițiul 5. Determinați cifra x , astfel încât:

- (a) $(\overline{3x}, 2) = 1$
- (b) $(\overline{1x3}, 3) = 1$
- (c) $(\overline{3x4}, 5) = 1$

Rezolvare:

(a) $\overline{3x} = 30 + x$ să fie impar $\Rightarrow x$ impar. $x \in \{1, 3, 5, 7, 9\}.$

(b) $\overline{1x3}$ nu trebuie să fie divizibil cu 3. Suma cifrelor: $1 + x + 3 = 4 + x$. Nu vrem multiplu de 3 $\Rightarrow x \notin \{2, 5, 8\}.$ $x \in \{0, 1, 3, 4, 6, 7, 9\}.$

(c) $\overline{3x4}$ se termină în 4 $\Rightarrow$ nu e multiplu de 5. $\boxed{\text{Orice cifră } x \in \{0, 1, \dots, 9\}.$

Exercițiul 6. Determinați numerele naturale x și y știind că:

- (a) $(x, y) = 10$ și $x + y = 40$
- (b) $(x, y) = 9$ și $x - y = 27$
- (c) $(x, y) = 5$ și $x \cdot y = 150$

Rezolvare:

(a) Scriem $x = 10m$, $y = 10n$ cu $(m, n) = 1$. Atunci $10(m + n) = 40 \Rightarrow m + n = 4$. Cu $(m, n) = 1$, posibil $(1, 3)$ sau $(3, 1)$. $\Rightarrow (x, y) \in \{(10, 30), (30, 10)\}.$

(b) $x = 9m$, $y = 9n$, $(m, n) = 1$, iar $9(m - n) = 27 \Rightarrow m - n = 3$. General: $m = n + 3$ cu $(n, n + 3) = 1$, adică $3 \nmid n$. $\Rightarrow \boxed{(x, y) = (9(n + 3), 9n), \text{ pentru orice } n \in \mathbb{N} \text{ cu } 3 \nmid n.}$

(c) $x = 5m$, $y = 5n$, $(m, n) = 1$, iar $xy = 150 \Rightarrow 25mn = 150 \Rightarrow mn = 6$. Perechi coprime pentru 6: $(1, 6)$, $(2, 3)$ (și invers). $\Rightarrow (x, y) \in \{(5, 30), (30, 5), (10, 15), (15, 10)\}.$

Exercițiul 7. Numerele 187, 150 și 77, împărțite la același număr natural, dau resturile egale cu 7, 6 și 5. La ce număr au fost împărțite?

Rezolvare:

Fie d împărțitorul. Cu teorema împărțirii cu rest:

$$187 = dq_1 + 7, \quad 150 = dq_2 + 6, \quad 77 = dq_3 + 5.$$

Scădem resturile:

$$187 - 7 = dq_1, \quad 150 - 6 = dq_2, \quad 77 - 5 = dq_3.$$

Deci d împarte pe 180, 144, 72. Cel mai mare astfel de număr este

$$(d) = (180, 144, 72) = 36.$$

$$\boxed{d = 36} \text{ (verificare: } 7, 6, 5 < 36 \text{)}.$$

Exercițiul 8. Determinați cel mai mic număr natural care împărțit la 3, 4, 5 sau 12 dă de fiecare dată restul 2.

Rezolvare:

Fie N numărul căutat. Scriem:

$$N = 3q_1 + 2, \quad N = 4q_2 + 2, \quad N = 5q_3 + 2, \quad N = 12q_4 + 2.$$

Deci $N - 2$ este multiplu comun al lui 3, 4, 5, 12. $[3, 4, 5, 12] = 60$, așadar $N = 2 + 60k$, $k \in \mathbb{N}$. Cel mai mic astfel de număr este $\boxed{N = 2}$.

Exercițiul 9. Determinați cifrele x și y , știind că:

- | | | |
|--|---|---|
| (a) $\overline{32x}$ este divizibil cu 2 | (c) $\overline{7x2y}$ este divizibil cu 6 | (e) $\overline{x78y}$ este divizibil cu 45 |
| (b) $\overline{3x5}$ este divizibil cu 5 | (d) $\overline{124x7}$ este divizibil cu 18 | (f) $\overline{87x6y}$ este divizibil cu 90 |

Rezolvare:

$$(a) \text{ Divizibil cu } 2 \Rightarrow \text{ultima cifră pară} \Rightarrow \boxed{x \in \{0, 2, 4, 6, 8\}}.$$

$$(b) \text{ Se termină în } 5 \Rightarrow \text{este mereu multiplu de } 5 \Rightarrow \boxed{x \in \{0, 1, \dots, 9\}}.$$

(c) Divizibil cu 6 $\Leftrightarrow$ divizibil cu 2 și cu 3. $\Rightarrow y$ par, iar suma cifrelor $7 + x + 2 + y = 9 + x + y$ este multiplu de 3.

Toate perechile (x, y) cu $y \in \{0, 2, 4, 6, 8\}$ și $x + y$ multiplu de 3.

(d) Pentru 18 trebuie să fie divizibil cu 2 și 9. Numărul $\overline{124x7}$ se termină în 7 $\Rightarrow$ este impar. $\Rightarrow$ Nu există soluții.

(e) Pentru 45 (adică 9 și 5): ultimă cifră $y \in \{0, 5\}$; suma cifrelor $= x + 7 + 8 + y = x + y + 15$ trebuie să fie multiplu de 9. Posibilități: $x + y \in \{3, 12\}$.

$$y = 0 \Rightarrow x = 3; \quad y = 5 \Rightarrow x = 7.$$

$(x, y) \in \{(3, 0), (7, 5)\}$.

(f) Pentru 90 (adică 9 și 10): ultima cifră $y = 0$; suma cifrelor $= 8 + 7 + x + 6 + 0 = 21 + x$ trebuie să fie multiplu de 9. $\Rightarrow 21 + x \in \{27, 36\} \Rightarrow x \in \{6, 15\} \Rightarrow$ $x = 6, y = 0$.

Exercițiul 10. Arătați că:

- (a) $4^{13} \cdot 25^{13} + 8$ este divizibil cu 9
- (b) $2^n \cdot 3n^2 + 2^{n+1} \cdot 3^{n+1} + 2^n + 3^2$ este divizibil cu 19, $n \in \mathbb{N}$
- (c) $2^{n+1} - 3n^2 \cdot 5^{2n+1} + 2^{n+2} - 3^{2n+1} \cdot 5^{2n}$ este divizibil cu 11, $n \in \mathbb{N}^*$

Rezolvare:

(a) Observăm $4^{13} \cdot 25^{13} = (4 \cdot 25)^{13} = 100^{13}$. Scriem cu teorema împărțirii cu rest:

$$100 = 9 \cdot 11 + 1 \Rightarrow 100^{13} = (9 \cdot 11 + 1)^{13}.$$

La dezvoltare, toate termenele, în afară de 1, conțin factorul 9; deci la împărțirea lui 100^{13} la 9 restul este 1.

$$100^{13} + 8 \text{ are rest } 1 + 8 = 9, \text{ adică } 0.$$

$\Rightarrow$ $4^{13} \cdot 25^{13} + 8$ este divizibil cu 9.

(b) Verificăm cazul $n = 0$ (este suficient un contraexemplu pentru a infirma enunțul pentru orice n):

$$A(0) = 2^0 \cdot 3 \cdot 0^2 + 2^1 \cdot 3^1 + 2^0 + 3^2 = 0 + 6 + 1 + 9 = 16.$$

La împărțirea lui 16 la 19 restul este $16 \neq 0$. $\Rightarrow$

Afirmația este falsă (nu e adevărată pentru toate $n \in \mathbb{N}$).

(c) Verificăm $n = 1$:

$$B(1) = 2^2 - 3 \cdot 1^2 \cdot 5^3 + 2^3 - 3^3 \cdot 5^2 = 4 - 375 + 8 - 675 = -1038.$$

La împărțirea lui 1038 la 11 obținem $11 \cdot 94 = 1034$ cu rest $4 \neq 0$. $\Rightarrow$

Afirmația este falsă (nu e adevărată pentru toate $n \in \mathbb{N}^*$).

Succes!