

Rezolvare - Fișă de lucru

Lecția 8 - Media aritmetică ponderată. Media geometrică

Clasa a 7-a – Capitolul 1 - Mulțimea numerelor reale

Instrucțiuni

Aplică formulele pentru media aritmetică ponderată și media geometrică. Folosește pași clari, fără a omite justificările. Durata recomandată: **30–40 de minute.**

Exerciții & Rezolvări

Exercițiul 1. Media aritmetică ponderată (MAP) a numerelor x_i cu ponderi p_i este

$$\text{MAP} = \frac{p_1x_1 + p_2x_2 + \cdots}{p_1 + p_2 + \cdots}.$$

- (a) 4, 9 cu ponderile 2, 3
- (b) 2, 5 cu ponderile 4, 8
- (c) 3, 5, 6 cu ponderile 2, 1, 2
- (d) 7, 10, 2 cu ponderile 1, 4, 5

Rezolvare:

$$(a) \frac{2 \cdot 4 + 3 \cdot 9}{2 + 3} = \frac{8 + 27}{5} = \frac{35}{5} = 7.$$

$$(b) \frac{4 \cdot 2 + 8 \cdot 5}{4 + 8} = \frac{8 + 40}{12} = \frac{48}{12} = 4.$$

$$(c) \frac{2 \cdot 3 + 1 \cdot 5 + 2 \cdot 6}{2 + 1 + 2} = \frac{6 + 5 + 12}{5} = \frac{23}{5} = 4,6.$$

$$(d) \frac{1 \cdot 7 + 4 \cdot 10 + 5 \cdot 2}{1 + 4 + 5} = \frac{7 + 40 + 10}{10} = \frac{57}{10} = 5,7.$$

Exercițiul 2. Note la un test: 3 elevi au 5, 4 elevi au 6, 6 elevi au 7, 2 elevi au 10.

- (a) Numărul total de elevi
- (b) Media aritmetică a notelor

Rezolvare:

- (a) Total elevi: $3 + 4 + 6 + 2 = 15$.
- (b) Media ponderată:

$$\frac{3 \cdot 5 + 4 \cdot 6 + 6 \cdot 7 + 2 \cdot 10}{15} = \frac{15 + 24 + 42 + 20}{15} = \frac{101}{15} \approx 6,73(3).$$

Exercițiul 3. Media geometrică (pentru $a, b > 0$) este $MG = \sqrt{ab}$.

- (a) 12 și 3
- (b) 8 și 2
- (c) 0,25 și 16
- (d) 1 și $\frac{1}{9}$

Rezolvare:

- (a) $\sqrt{12 \cdot 3} = \sqrt{36} = 6$.
- (b) $\sqrt{8 \cdot 2} = \sqrt{16} = 4$.
- (c) $0,25 = \frac{1}{4}$, deci $\sqrt{\frac{1}{4} \cdot 16} = \sqrt{4} = 2$.
- (d) $\sqrt{1 \cdot \frac{1}{9}} = \sqrt{\frac{1}{9}} = \frac{1}{3}$.

Exercițiul 4. MG cu radicali / fracții pozitive:

- (a) $a = 2\sqrt{2}$, $b = 8\sqrt{2}$
- (b) $a = \sqrt{5}$, $b = \sqrt{20}$
- (c) $a = 3\sqrt{2}$, $b = 6$
- (d) $a = \frac{1}{2}$, $b = 8$

Rezolvare:

(a) $ab = (2\sqrt{2})(8\sqrt{2}) = 16 \cdot (\sqrt{2}\sqrt{2}) = 16 \cdot 2 = 32$, deci

$$MG = \sqrt{32} = \sqrt{16 \cdot 2} = 4\sqrt{2}.$$

(b) $ab = \sqrt{5} \cdot \sqrt{20} = \sqrt{100} = 10$, deci $MG = \sqrt{10}$.

(c) $ab = (3\sqrt{2}) \cdot 6 = 18\sqrt{2}$, deci $MG = \sqrt{18\sqrt{2}}$ (formă exactă).

(d) $ab = \frac{1}{2} \cdot 8 = 4$, deci $MG = \sqrt{4} = 2$.

Exercițiul 5. Găsește a cunoscând mg și b ($a, b > 0$). Folosim $MG = \sqrt{ab} \Rightarrow ab = (mg)^2$ și $a = \frac{(mg)^2}{b}$.

(a) $mg = 6, b = 3$

(b) $mg = 10, b = 4$

(c) $mg = \sqrt{15}, b = \sqrt{3}$

(d) $mg = \frac{3}{2}, b = \frac{3}{4}$

Rezolvare:

(a) $a = \frac{6^2}{3} = \frac{36}{3} = 12$.

(b) $a = \frac{10^2}{4} = \frac{100}{4} = 25$.

(c) $a = \frac{(\sqrt{15})^2}{\sqrt{3}} = \frac{15}{\sqrt{3}} = \frac{15\sqrt{3}}{3} = 5\sqrt{3}$.

(d) $a = \frac{\left(\frac{3}{2}\right)^2}{\frac{3}{4}} = \frac{9/4}{3/4} = \frac{9}{3} = 3$.

Exercițiul 6. Căutăm exponenții n, m dacă $mg = 16$, $a = 2^n$, $b = 4^m$ și $ab = 256$.

Rezolvare:

$MG = \sqrt{ab} = 16$ înseamnă $ab = 16^2 = 256$ (în acord cu enunțul).

Scriem $b = 4^m = (2^2)^m = 2^{2m}$. Atunci

$$ab = 2^n \cdot 2^{2m} = 2^{n+2m} = 256 = 2^8.$$

Rezultă $n + 2m = 8$ cu $n, m \in N$. Toate perechile:

$$(m, n) = (0, 8), (1, 6), (2, 4), (3, 2), (4, 0).$$

Exercițiul 7. Inegalitatea mediilor (pentru $a, b > 0$): $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$. Verifică pentru:

(a) $a = 2, b = 8$

(b) $a = 5, b = 20$

(c) $a = 1, b = 1$

(d) $a = \frac{1}{4}, b = 4$

Rezolvare:

(a) $\frac{2+8}{2} = 5$ și $\sqrt{2 \cdot 8} = \sqrt{16} = 4$. $5 \geq 4$ (adevărat).

(b) $\frac{5+20}{2} = 12,5$ și $\sqrt{5 \cdot 20} = \sqrt{100} = 10$. $12,5 \geq 10$ (adevărat).

(c) $\frac{1+1}{2} = 1$ și $\sqrt{1 \cdot 1} = 1$. $1 = 1$ (adevărat; egalitate).

(d) $\frac{\frac{1}{4}+4}{2} = \frac{\frac{1}{4}+\frac{16}{4}}{2} = \frac{\frac{17}{4}}{2} = \frac{17}{8} = 2,125$ și $\sqrt{\frac{1}{4} \cdot 4} = \sqrt{1} = 1$. $2,125 \geq 1$ (adevărat).

Exercițiul 8. Demonstrație AM–GM pentru $a, b > 0$ și verificare numerică ($a = 3, b = 12$).

Rezolvare:

Pentru $a, b > 0$, pătratul oricărui număr este nenegativ:

$$(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geq 0.$$

Dezvoltăm:

$$a + b - 2\sqrt{ab} \geq 0 \iff \frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}.$$

Verificare pentru $a = 3, b = 12$:

$$\text{AM} = \frac{3+12}{2} = 7,5, \quad \text{GM} = \sqrt{3 \cdot 12} = \sqrt{36} = 6,$$

iar $7,5 \geq 6$ este adevărat.

Succes!