

## Lecția 7 – Recapitulare Capitolul 4

Clasa a 8-a – Capitolul 4 - Ecuatii, inecuatii și sisteme de ecuatii

### Instrucțiuni

Această fișă recapitulează cunoștințele despre ecuații de gradul I și II, inecuatii și sisteme.  
*Recomandare:* Verifică întotdeauna dacă soluțiile obținute aparțin domeniului de existență (în special la fracții).

Durata recomandată: **50 minute**.

### Exerciții

**Exercițiul 1.** Determinați mulțimea soluțiilor reale pentru următoarele ecuații liniare:

(a)  $3(2x - 5) - 4(x + 1) = 7$

(b)  $\frac{5-2x}{3} + \frac{x-1}{2} = 1$

(c)  $0,4(5x - 3) - 0,2(2x + 7) = 1,8$

**Exercițiul 2.** Rezolvați în  $\mathbb{R}$  ecuațiile fracționare, stabilind mai întâi **domeniul de existență**:

(a)  $\frac{x+1}{x-2} = 3$

(b)  $\frac{2}{x+3} + \frac{1}{x-1} = 1$

(c)  $\frac{3x-5}{x+1} - \frac{x+2}{x-1} = 0$

**Exercițiul 3.** Determinați  $x \in \mathbb{R}$  care verifică egalitățile sau inegalitățile cu modul:

(a)  $|2x - 5| = 7$

(b)  $|x + 3| \leq 4$

(c)  $|3 - x| > 2$

**Exercițiul 4.** Rezolvați ecuațiile de gradul al II-lea:

(a)  $x^2 - 7x + 12 = 0$

- (b)  $4x^2 - 9 = 0$   
 (c)  $x^2 + 6x + 9 = 25$

**Exercițiul 5.** Rezolvați sistemele liniare, precizând dacă au soluție unică, o infinitate de soluții sau nu au soluții:

- (a)  $\begin{cases} 3x - 2y = 7 \\ x + y = 5 \end{cases}$   
 (b)  $\begin{cases} 2x + 3y = 1 \\ 4x + 6y = 2 \end{cases}$   
 (c)  $\begin{cases} x - 2y = 4 \\ 2x - 4y = 9 \end{cases}$

**Exercițiul 6.** Rezolvați inecuațiile și scrieți soluțiile sub formă de interval:

- (a)  $-8 \leq 2x + 4 < 10$   
 (b)  $\begin{cases} \frac{x-3}{2} \geq 1 \\ x + 5 < 12 \end{cases}$   
 (c)  $\frac{x-1}{4} - \frac{x+3}{2} \leq 1$

**Exercițiul 7.** Probleme modelate prin ecuații/sisteme:

- (a) La un magazin, 3 caiete și 2 pixuri costă 23 lei, iar 5 caiete și 1 pix costă 31 lei. Determinați prețul unui caiet și al unui pix.  
 (b) Un dreptunghi are perimetrul 86 m, iar lungimea este cu 7 m mai mare decât lățimea. Determinați aria dreptunghiului.

**Exercițiul 8.** Rezolvați în  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$  sistemul următor, punând mai întâi condițiile de existență:

$$\begin{cases} \frac{2}{x+1} + \frac{3}{y-2} = 4 \\ \frac{4}{x+1} - \frac{1}{y-2} = 1 \end{cases}$$

**Succes!**

**Exercițiul 1.** Determinați mulțimea soluțiilor reale pentru următoarele ecuații liniare:

(a)  $3(2x - 5) - 4(x + 1) = 7$

(b)  $\frac{5-2x}{3} + \frac{x-1}{2} = 1$

(c)  $0,4(5x - 3) - 0,2(2x + 7) = 1,8$

a)  $3(2x - 5) - 4(x + 1) = 7$

$$3 \cdot 2x - 3 \cdot 5 - 4 \cdot x - 4 \cdot 1 = 7$$

$$6x - 15 - 4x - 4 = 7 \Rightarrow 6x - 4x = 7 + 4 + 15$$

$$2x = 26 \quad |:2$$

$$x = 13 \Rightarrow S = \{13\}$$

b)  $\frac{5-2x}{3} + \frac{x-1}{2} = 1$

$$\frac{2(5-2x)}{6} + \frac{3(x-1)}{6} = \frac{6}{6} \quad |:6 \Rightarrow 2 \cdot 5 - 2 \cdot 2x + 3 \cdot x - 3 \cdot 1 = 6$$

$$10 - 4x + 3x - 3 = 6 \Rightarrow -4x + 3x = 6 + 3 - 10$$

$$-x = -1 \quad | \cdot (-1)$$

$$x = 1 \Rightarrow S = \{1\}$$

c)  $0,4(5x - 3) - 0,2(2x + 7) = 1,8$

$$0,4 \cdot 5x - 0,4 \cdot 3 - 0,2 \cdot 2x - 0,2 \cdot 7 = 1,8$$

$$2x - 1,2 - 0,4x - 1,4 = 1,8 \Rightarrow 2x - 0,4x = 1,8 + 1,4 + 1,2$$

$$1,6x = 4,4 \quad |:1,6$$

$$x = 2,75 \Rightarrow S = \{2,75\}$$

**Exercițiul 2.** Rezolvați în  $\mathbb{R}$  ecuațiile fracționare, stabilind mai întâi **domeniul de existență**:

(a)  $\frac{x+1}{x-2} = 3$

(b)  $\frac{2}{x+3} + \frac{1}{x-1} = 1$

(c)  $\frac{3x-5}{x+1} - \frac{x+2}{x-1} = 0$

a)  $\frac{x+1}{x-2} = 3$

Condiție:  $x-2 \neq 0 \quad | +2 \Rightarrow x \neq 2$

$$\frac{x+1}{x-2} = 3 \quad | \cdot (x-2) \Rightarrow x+1 = 3(x-2) \Rightarrow x+1 = 3x-6 \Rightarrow x-3x = -6-1$$

$$\Rightarrow -2x = -7 \quad | : (-2) \Rightarrow x = \frac{7}{2} \neq 1 \Rightarrow S = \left\{ \frac{7}{2} \right\}$$

b) Condiție:  $x+3 \neq 0 \quad | -3$  și  $x-1 \neq 0 \quad | +1$   
 $x \neq -3$  și  $x \neq 1$

$$\frac{x-1}{x+3} + \frac{1}{x-1} = 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{2(x-1) + (x+3)}{(x-1)(x+3)} = \frac{(x+3)(x-1)}{(x+3)(x-1)} \quad | \cdot (x+3)(x-1)$$

$$\Rightarrow 2x-2+x+3 = x \cdot x - x \cdot 1 + 3 \cdot x - 3 \cdot 1$$

$$3x+1 = x^2 - x + 3x - 3 \Rightarrow x^2 - x + 3x - 3 - 3x - 1 = 0$$

$$x^2 - x - 4 = 0 \Rightarrow a=1, b=-1, c=-4$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-4) = 1 + 16 = 17$$

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{1 - \sqrt{17}}{2}$$

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{1 + \sqrt{17}}{2}$$

$$\Rightarrow S = \left\{ \frac{1 \pm \sqrt{17}}{2} \right\}$$

c) Condiții:  $x+1 \neq 0 \quad | -1$  și  $x-1 \neq 0 \quad | +1$   
 $x \neq -1$  și  $x \neq 1$

$$\frac{3x-5}{x+1} - \frac{x+2}{x-1} = 0 \Rightarrow \frac{3x-5}{x+1} \cdot \frac{x+2}{x-1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (3x-5)(x-1) = (x+2)(x+1)$$

$$3x \cdot x - 3x \cdot 1 - 5 \cdot x - 5 \cdot (-1) = x \cdot x + x \cdot 1 + 2 \cdot x + 2 \cdot 1$$

$$3x^2 - 3x - 5x + 5 = x^2 + x + 2x + 2$$

$$3x^2 - 8x + 5 = x^2 + 3x + 2 \Rightarrow \underline{3x^2 - 8x + 5} - \underline{x^2 - 3x - 2} = 0$$

$$2x^2 - 11x + 3 = 0 \Rightarrow a=2, b=-11, c=3$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-11)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 3 = 121 - 24 = 97$$

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{11 - \sqrt{97}}{4}$$

$$\Rightarrow S = \left\{ \frac{11 \pm \sqrt{97}}{4} \right\}$$

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{11 + \sqrt{97}}{4}$$

**Exercițiul 3.** Determinați  $x \in \mathbb{R}$  care verifică egalitățile sau inegalitățile cu modul:

(a)  $|2x - 5| = 7$

(b)  $|x + 3| \leq 4$

(c)  $|3 - x| > 2$

a)  $|2x - 5| = 7 \Rightarrow 2x - 5 = 7 \quad | +5$  sau  $2x - 5 = -7 \quad | +5$   
 $2x = 12 \quad | :2$   $2x = -2 \quad | :2$   
 $x = 6$   $x = -1 \Rightarrow x \in \{-1, 6\}$

b)  $|x + 3| \leq 4 \Rightarrow -4 \leq x + 3 \leq 4 \quad | -3$   
 $-7 \leq x \leq 1 \Rightarrow x \in [-7, 1]$

c)  $|3 - x| > 2 \Rightarrow 3 - x > 2 \quad | -3$  sau  $3 - x < -2 \quad | -3$   
 $-x > -1 \quad | \cdot (-1)$   $-x < -5 \quad | \cdot (-1)$   
 $x < 1$   $x > 5$

$$\Rightarrow x \in (-\infty, 1) \cup (5, +\infty)$$

**Exercițiul 4.** Rezolvați ecuațiile de gradul al II-lea:

(a)  $x^2 - 7x + 12 = 0$

(b)  $4x^2 - 9 = 0$

(c)  $x^2 + 6x + 9 = 25$

a)  $x^2 - 7x + 12 = 0 \Rightarrow a=1, b=-7, c=12$

$\Delta = b^2 - 4ac \Rightarrow \Delta = (-7)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 12 = 49 - 48 = 1$

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \Rightarrow x_1 = \frac{7 - \sqrt{1}}{2 \cdot 1} = \frac{7-1}{2} = \frac{6}{2} = 3 \\ x_2 &= \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \Rightarrow x_2 = \frac{7 + \sqrt{1}}{2 \cdot 1} = \frac{7+1}{2} = \frac{8}{2} = 4 \end{aligned} \quad \Rightarrow S = \{3, 4\}$$

b)  $4x^2 - 9 = 0 \quad | +9$

$4x^2 = 9 \quad | :4$

$x^2 = \frac{9}{4} \Rightarrow x = \pm \sqrt{\frac{9}{4}} \Rightarrow x = \pm \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{4}} \Rightarrow x = \pm \frac{3}{2}$

c)  $x^2 + 6x + 9 = 25 \Rightarrow a=1, b=6, c=-9$

$\Delta = b^2 - 4ac \Rightarrow \Delta = 6^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-9) = 36 - 36 = 0 \Rightarrow \text{soluție unică}$

$x = \frac{-b}{2a} \Rightarrow x = \frac{-6}{2} \Rightarrow x = -3$

**Exercițiul 5.** Rezolvați sistemele liniare, precizând dacă au soluție unică, o infinitate de soluții sau nu au soluții:

(a)  $\begin{cases} 3x - 2y = 7 \\ x + y = 5 \end{cases}$

$$\begin{cases} 3x - 2y = 7 \\ x + y = 5 \end{cases} \quad | \cdot 2 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} 3x - 2y = 7 \\ 2x + 2y = 10 \end{cases} \quad (+)$$

$5x = 17 \quad | :5$

$x = \frac{17}{5}$

$x + y = 5 \Rightarrow y + \frac{17}{5} = 5 \quad | - \frac{17}{5} \Rightarrow y = 5 - \frac{17}{5} = \frac{25-17}{5} \Rightarrow y = \frac{8}{5}$

$$(b) \begin{cases} 2x + 3y = 1 \\ 4x + 6y = 2 \end{cases}$$

$$(c) \begin{cases} x - 2y = 4 \\ 2x - 4y = 9 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} 2x + 3y = 1 \quad | \cdot 2 \\ 4x + 6y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x + 6y = 2 \\ 4x + 6y = 2 \end{cases}$$

Ecuațiile sunt identice, nu avem cum să aplicăm nicio metodă.  
 $\Rightarrow$  Sunt o infinitate de soluții care se potrivește pentru o ecuație cu 2 necunoscute.

$$c) \begin{cases} x - 2y = 4 \quad | \cdot 2 \\ 2x - 4y = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 4y = 8 \\ 2x - 4y = 9 \end{cases} \Rightarrow \text{Contradicție}$$

Avem 2 rezultate diferite pentru aceeași ecuație  $\Rightarrow$  Nu există soluții.

**Exercițiul 6.** Rezolvați inecuațiile și scrieți soluțiile sub formă de interval:

$$(a) -8 \leq 2x + 4 < 10$$

$$(b) \begin{cases} \frac{x-3}{2} \geq 1 \\ x + 5 < 12 \end{cases}$$

$$(c) \frac{x-1}{4} - \frac{x+3}{2} \leq 1$$

$$a) -8 \leq 2x + 4 < 10 \quad | -4$$

$$-12 \leq 2x < 6 \quad | :2$$

$$-6 \leq x < 3 \Rightarrow x \in [-6, 3)$$

$$b) \frac{x-3}{2} \geq 1 \quad | \cdot 2 \quad \text{și} \quad x + 5 < 12 \quad | -5$$

$$x - 3 \geq 2 \quad | +3$$

$$x \geq 5$$

$$x < 7$$

$$\Rightarrow x \in [5, 7)$$

$$c) \frac{x-1}{4} - \frac{x+3}{2} \leq 1 \quad | \cdot 4 \quad \Rightarrow x - 1 - 2(x+3) \leq 4$$

$$x - 1 - 2x - 6 \leq 4 \Rightarrow x - 2x \leq 4 + 6 + 1$$

$$-x \leq 11 \quad | \cdot (-1)$$

$$x \geq -11 \Rightarrow x \in [-11, +\infty)$$

**Exercițiul 7.** Probleme modelate prin ecuații/sisteme:

- (a) La un magazin, 3 caiete și 2 pixuri costă 23 lei, iar 5 caiete și 1 pix costă 31 lei.  
Determinați prețul unui caiet și al unui pix.
- (b) Un dreptunghi are perimetrul 86 m, iar lungimea este cu 7 m mai mare decât lățimea.  
Determinați aria dreptunghiului.

a) Notăm numărul de caiete cu  $c$  și numărul de pixuri cu  $p$ .

$$\begin{cases} 3c + 2p = 23 \\ 5c + 1p = 31 \end{cases} \quad \begin{matrix} 1 \cdot (-2) \\ \end{matrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 3c + 2p = 23 \\ -10c - 2p = -62 \end{cases} \quad (+)$$

$$\frac{-7c}{-7} = -39 \quad | : (-7)$$

$$c = \frac{39}{7}$$

$$5c + p = 31 \Rightarrow p = 31 - 5c \Rightarrow p = 31 - 5 \cdot \frac{39}{7} \Rightarrow p = \frac{31 \cdot 7 - 5 \cdot 39}{7}$$

$$p = \frac{217 - 195}{7} \Rightarrow p = \frac{22}{7}$$

b)  $P = 86 \text{ m} \Rightarrow 2(L + l) = 86 \quad | : 2$

$$L + l = 43$$

$$\begin{cases} L + l = 43 \\ L = l + 7 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} l + 7 + l = 43 \\ L = l + 7 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} 2l + 7 = 43 \quad | -7 \\ L = l + 7 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2l = 36 \quad | : 2 \\ L = l + 7 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} l = 18 \text{ m} \\ L = 18 + 7 = 25 \text{ m} \end{cases}$$

$$\text{Aria} = L \cdot l = 25 \cdot 18 = 450 \text{ m}^2$$

**Exercițiul 8.** Rezolvați în  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$  sistemul următor, punând mai întâi condițiile de existență:

$$\begin{cases} \frac{2}{x+1} + \frac{3}{y-2} = 4 \\ \frac{4}{x+1} - \frac{1}{y-2} = 1 \end{cases}$$

Condiții:  $x+1 \neq 0$   $| -1$  și  $y-2 \neq 0$   $| +2$   
 $x \neq -1$  și  $y \neq 2$

Notăm  $\frac{1}{x+1} = a$  și  $\frac{1}{y-2} = b$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2 \cdot a + 3 \cdot b = 4 \\ 4 \cdot a - b = 1 \end{cases} \quad (\Leftrightarrow) \quad \begin{cases} 2a + 3b = 4 \\ 12a - 3b = 3 \end{cases} \quad (+)$$
$$\frac{14a}{14} = \frac{7}{14} \Rightarrow a = \frac{1}{2}$$

$$4a - b = 1 \Rightarrow b = 4a - 1$$
$$\Rightarrow b = 2 - 1 = 1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{x+1} = \frac{1}{2} \Rightarrow x+1 = 2 \quad | -1 \Rightarrow \underline{x=1}$$

$$\frac{1}{y-2} = 1 \Rightarrow y-2 = 1 \quad | +2 \Rightarrow \underline{y=3}$$