

Lecția 7 - Aria triunghiului și a paralelogramului

Clasa a 7-a – Capitolul Geometrie

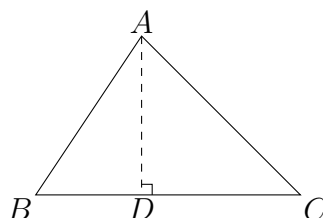
Instrucțiuni

Rezolvă exercițiile folosind formulele pentru aria triunghiului și a paralelogramului. Durata recomandată: **50 de minute**.

Exerciții

Exercițiul 1. Se consideră triunghiul ABC .

- (a) Dacă $BC = 12$ cm și înălțimea $AD = 8$ cm ($D \in BC$), calculați aria triunghiului.
- (b) Dacă $AB = 6$ cm, $AC = 10$ cm și $m(\angle A) = 30^\circ$, calculați aria triunghiului.



a)

$$A = \frac{b \cdot h}{2}$$

$$b = BC, h = AD$$

$$\Rightarrow A_{ABC} = \frac{BC \cdot AD}{2} = \frac{12 \cdot 8}{2}$$

$$A_{ABC} = 6 \cdot 8 = 48 \text{ cm}^2$$

b)

$$A_{\Delta} = \frac{AB \cdot AC \cdot \sin A}{2}$$

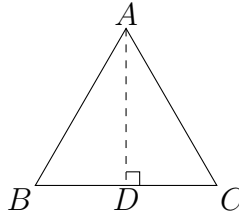
$$A_{ABC} = \frac{6 \cdot 10 \cdot \sin 30}{2}$$

1

$$A_{ABC} = 30 \cdot \frac{1}{2} = 15 \text{ cm}^2$$

Exercițiul 2. Un triunghi echilateral are perimetrul egal cu 18 cm.

- (a) Calculați lungimea laturii și aria triunghiului.
- (b) Determinați înălțimea triunghiului.



$$a) \quad \left. \begin{array}{l} P = 3l \\ P = 18 \text{ cm} \end{array} \right\} \Rightarrow l = \frac{P}{3} = \frac{18}{3} = 6 \text{ cm}$$

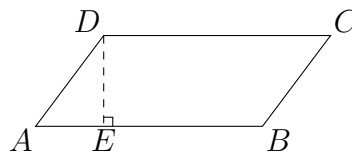
$\triangle ABC$ - triunghi echilateral $\Rightarrow A_{\triangle} = \frac{l^2 \sqrt{3}}{4}$

$$A_{ABC} = \frac{6^2 \sqrt{3}}{4} = 9\sqrt{3} \text{ cm}^2$$

b) $h = \frac{l\sqrt{3}}{2} \Rightarrow h = \frac{6\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3} \text{ cm}$

Exercițiul 3. Fie paralelogramul $ABCD$ cu laturile $AB = 10 \text{ cm}$ și $AD = 6 \text{ cm}$.

- (a) Dacă înălțimea corespunzătoare laturii AB este $DE = 4 \text{ cm}$, calculați aria paralelogramului.
- (b) Dacă $m(\angle DAB) = 45^\circ$, calculați aria paralelogramului folosind formula trigonometrică.



a) $A_{\text{paralelogram}} = l \cdot h$

$$A_{ABCD} = AB \cdot DE = 10 \cdot 4 = 40 \text{ cm}^2$$

b)

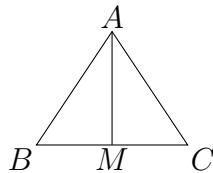
$$A_{\text{paralelogram}} = AB \cdot AD \cdot \sin A$$

$$A_{ABCD} = 10 \cdot 6 \cdot \sin 45^\circ$$

$$A_{ABCD} = 60 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 30\sqrt{2} \text{ cm}^2$$

Exercițiul 4. Fie triunghiul ABC cu aria de 48 cm^2 . Punctul M este mijlocul laturii BC .

- (a) Calculați aria triunghiului ABM .
 (b) Dacă triunghiul ABC este asemenea cu triunghiul DEF și raportul de asemănare este $\frac{AB}{DE} = \frac{1}{2}$, calculați aria triunghiului DEF .



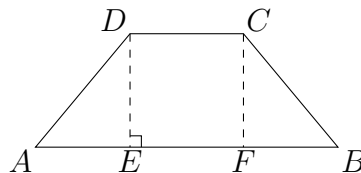
a) *Într-un triunghi, o mediană împarte triunghiul în două triunghiuri cu arii egale.*

$$M - \text{mijlocul lui } BC \Rightarrow AM - \text{mediană} \Rightarrow A_{\triangle ABM} = \frac{A_{\triangle ABC}}{2} = \frac{48}{2} = 24 \text{ cm}^2$$

b) $\triangle ABC \sim \triangle DEF \Rightarrow \frac{AB}{DE} = k = \frac{1}{2}$
 $\frac{A_{\triangle ABC}}{A_{\triangle DEF}} = k^2 \Rightarrow A_{\triangle DEF} = \frac{A_{\triangle ABC}}{k^2} = \frac{48}{\frac{1}{4}} = 48 \cdot 4 = 192 \text{ cm}^2$

Exercițiul 5. Se consideră trapezul isoscel $ABCD$ cu $AB \parallel CD$. Bazele sunt $AB = 16 \text{ cm}$ și $CD = 6 \text{ cm}$, iar latura neparalelă $AD = 13 \text{ cm}$.

- (a) Calculați înălțimea trapezului.
 (b) Determinați aria trapezului.



a) $DE \perp AB, E \in AB$
 $CF \perp AB, F \in AB$

În trapezul isoscel, proiecția laturii neparalele pe baza mare este: $AE = \frac{AB - CD}{2} = \frac{16 - 6}{2} = \frac{10}{2} = 5 \text{ cm}$

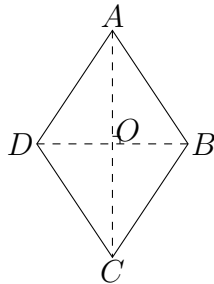
$\triangle ADE: m(\angle E) = 90^\circ \xRightarrow[\text{Pitagora}]{\text{Teorema lui Pitagora}} AD^2 = DE^2 + AE^2 \Rightarrow DE^2 = AD^2 - AE^2 = 169 - 25 = 144$
 $DE = 12 \text{ cm} \Rightarrow h = 12 \text{ cm}$

b) $A_{\text{trapez}} = \frac{(B+b) \cdot h}{2}$

$A_{ABCD} = \frac{(AB+CD) \cdot DE}{2} = \frac{(16+6) \cdot 12}{2} = 22 \cdot 6 = 132 \text{ cm}^2$

Exercițiul 6. Un romb are o diagonală $AC = 10$ cm și aria egală cu 120 cm².

- (a) Aflați lungimea celeilalte diagonale BD .
 (b) Calculați latura rombului și perimetrul acestuia.



a)

$$A_{\text{romb}} = \frac{d_1 \cdot d_2}{2}$$

$$A_{ABCD} = \frac{AC \cdot BD}{2} \Rightarrow BD = \frac{2A_{ABCD}}{AC}$$

$$BD = \frac{2 \cdot 120}{10} = 24 \text{ cm}$$

b)

Într-un romb, diagonalele sunt perpendiculare și se înjumătățesc în p.

$$ABCD - \text{romb} \Rightarrow AO = OC = \frac{AC}{2} = 5 \text{ cm}$$

$$BO = OD = \frac{BD}{2} = 12 \text{ cm}$$

$$\text{În } \triangle AOB: m(\angle O) = 90^\circ \Rightarrow AB^2 = AO^2 + OB^2$$

$$AB^2 = 25 + 144$$

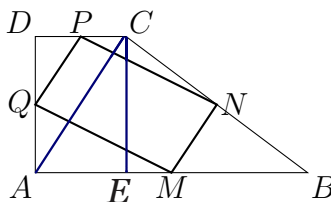
$$AB^2 = 169 \Rightarrow AB = 13 \text{ cm}$$

$$P_{ABCD} = 4 \cdot AB = 4 \cdot 13 = 52 \text{ cm}$$

Exercițiul 7. Fie $ABCD$ un trapez dreptunghic ($AB \parallel CD$, $\angle A = 90^\circ$) cu bazele $AB = 12$ cm, $CD = 4$ cm și latura ne paralelă $BC = 10$ cm. Fie M, N, P, Q mijloacele laturilor AB, BC, CD , respectiv DA .

(a) Calculați aria trapezului $ABCD$.

(b) Arătați că patrulaterul $MNPQ$ este paralelogram și calculați aria acestuia.



a)

Fie $CE \perp AB$, $E \in AB \Rightarrow m(\angle E) = 90^\circ$
 $m(\angle A) = 90^\circ$
 $m(\angle D) = 90^\circ$
 $\Rightarrow \triangle CEA - \text{dreptunghi} \Rightarrow AE = CD = 4 \text{ cm}$

$$AE + EB = AB \Rightarrow EB = AB - AE = 12 - 4 = 8 \text{ cm}$$

$$\triangle CEB: m(\angle E) = 90^\circ \xRightarrow[\text{Pitagora}]{\text{Teorema}} BC^2 = EB^2 + CE^2$$

$$CE^2 = BC^2 - EB^2$$

$$CE^2 = 100 - 64 = 36 \Rightarrow CE = 6 \text{ cm}$$

$$A_{\text{trapez}} = \frac{(B+b) \cdot h}{2}$$

$$A_{ABCD} = \frac{(AB+CD) \cdot CE}{2} = \frac{(12+4) \cdot 6}{2} = 16 \cdot 3 = 48 \text{ cm}^2$$

b) *construim diagonala AC*

În $\triangle ABC$: M, N - mijloacele lui AB și $BC \Rightarrow MN$ - linie mijlocie
 $\Rightarrow MN \parallel AC$, $MN = \frac{AC}{2}$ (1)

În $\triangle ADC$: P, Q - mijloacele lui CD și $DA \Rightarrow PQ$ - linie mijlocie
 $\Rightarrow PQ \parallel AC$, $PQ = \frac{AC}{2}$ (2)

Din (1) și (2) $\Rightarrow MN \parallel PQ$, $MN = PQ \Rightarrow MNPQ$ - paralelogram

$$A_{MNPQ} = A_{ABCD} - (A_{QAM} + A_{PAQ} + A_{NCP} + A_{MBN})$$

$$\begin{aligned} Q - \text{mijlocul lui } AD &\Rightarrow AQ = \frac{AD}{2} = \frac{6}{2} = 3 \text{ cm} \\ M - \text{mijlocul lui } AB &\Rightarrow AM = \frac{AB}{2} = \frac{12}{2} = 6 \text{ cm} \end{aligned} \quad \Rightarrow A_{QAM} = \frac{AQ \cdot AM}{2} = \frac{3 \cdot 6}{2} = 9 \text{ cm}^2$$

$$P - \text{mijlocul lui } CD \Rightarrow DP = \frac{CD}{2} = \frac{4}{2} = 2 \text{ cm}$$

$$Q - \text{mijlocul lui } AD \Rightarrow DQ = \frac{AD}{2} = \frac{6}{2} = 3 \text{ cm}$$

$$A_{PAQ} = \frac{DP \cdot DQ}{2} = \frac{2 \cdot 3}{2} = 3 \text{ cm}^2$$

$$N - \text{mijlocul lui } BC \Rightarrow d(N, AD) = \frac{h}{2} = h_N = \frac{6}{2} = 3 \text{ cm}$$

$$A_{MBN} = \frac{MB \cdot h_N}{2} = \frac{6 \cdot 3}{2} = 9 \text{ cm}^2$$

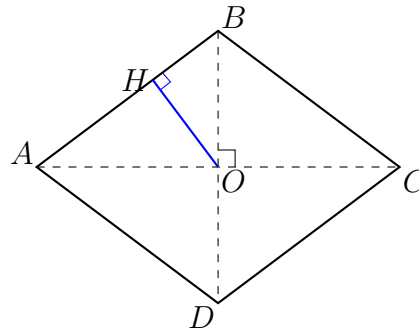
$$A_{NCP} = \frac{CP \cdot h_N}{2} = \frac{2 \cdot 3}{2} = 3 \text{ cm}^2$$

$$A_{MNPQ} = 48 - (9 + 3 + 9 + 3)$$

$$A_{MNPQ} = 48 - 24 = 24 \text{ cm}^2$$

Exercițiul 8. Se consideră rombul $ABCD$ în care diagonalele se intersectează în punctul O . Se știe că lungimile diagonalelor sunt $AC = 32$ cm și $BD = 24$ cm.

- (a) Calculați perimetrul rombului și aria acestuia.
 (b) Fie $OH \perp AB$, unde $H \in AB$. Calculați lungimea segmentului OH și demonstrați că înălțimea rombului este egală cu $2 \cdot OH$.



a) $ABCD$ - romb $\Rightarrow$ diagonalele se înjumătățesc

$$AO = \frac{AC}{2} = \frac{32}{2} = 16 \text{ cm}$$

$$BO = \frac{BD}{2} = \frac{24}{2} = 12 \text{ cm}$$

În $\triangle AOB$: $m(\angle O) = 90^\circ \xRightarrow{\text{Teorema lui Pitagora}} AB^2 = AO^2 + OB^2$

$$AB^2 = 256 + 144 = 400 \Rightarrow AB = 20 \text{ cm}$$

$$P = 4AB = 4 \cdot 20 = 80 \text{ cm}$$

$$A_{ABCD} = \frac{AC \cdot BD}{2} = \frac{32 \cdot 24}{2} = 384 \text{ cm}^2$$

b)

$$\left. \begin{array}{l} \triangle AOB: m(\angle O) = 90^\circ \\ OH \perp AB, H \in AB \end{array} \right\} \Rightarrow OH = \frac{AO \cdot OB}{AB}$$

$$OH = \frac{16 \cdot 12}{20} = 9,6 \text{ cm}$$

$$A_{\text{romb}} = l \cdot h_{\text{romb}}$$

$$h_{\text{romb}} = \frac{A_{\text{romb}}}{AB} = \frac{384}{20} = 19,2 \text{ cm}$$

$$2 \cdot OH = 2 \cdot 9,6 = 19,2 = h_{\text{romb}}$$