

Lecția 6 - Rezolvarea triunghiului dreptunghic

Clasa a 7-a – Capitolul Geometrie

Instrucțiuni

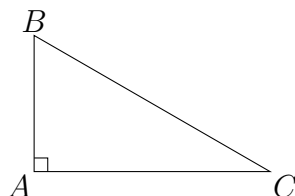
Rezolvă exercițiile folosind funcțiile trigonometrice ($\sin$, $\cos$, tg , ctg) și Teorema lui Pitagora pentru a determina elementele necunoscute ale triunghiurilor. Durata recomandată: **50 de minute**.

Exerciții

Exercițiul 1. În triunghiul dreptunghic ABC ($\angle A = 90^\circ$), se cunosc următoarele elemente. Determină lungimile celorlalte laturi și măsurile unghiurilor ascuțite.

(a) $m(\angle B) = 30^\circ$ și ipotenuza $BC = 12$ cm.

(b) $m(\angle C) = 45^\circ$ și cateta $AB = 8$ cm.



$$a) \quad \underbrace{m(\angle A)}_{90^\circ} + \underbrace{m(\angle B)}_{30^\circ} + m(\angle C) = 180^\circ \Rightarrow m(\angle C) = 180^\circ - 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$$

$$\sin B = \frac{AC}{BC} \quad \left. \begin{array}{l} \Rightarrow \\ \sin 30 = \frac{1}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{AC}{12} = \frac{1}{2} \Rightarrow AC = \frac{12}{2} = 6 \text{ cm}$$

$$\cos B = \frac{AB}{BC} \quad \left. \begin{array}{l} \Rightarrow \\ \cos 30 = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{AB}{12} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow AB = \frac{12\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3} \text{ cm}$$

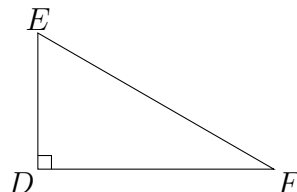
$$b) \quad \underbrace{m(\angle A)}_{90^\circ} + m(\angle B) + \underbrace{m(\angle C)}_{45^\circ} = 180^\circ \Rightarrow m(\angle B) = 180^\circ - 90^\circ - 45^\circ = 45^\circ \Rightarrow \triangle ABC \text{ - dreptunghic isoscel}$$

1

$$\begin{aligned} AC &= AB = 8 \text{ cm} \\ \triangle ABC: m(\angle A) &= 90^\circ \xRightarrow[\text{Teorema lui Pitagora}]{} BC^2 = AB^2 + AC^2 = 64 + 64 = 128 \\ BC &= \sqrt{128} = 8\sqrt{2} \text{ cm} \end{aligned}$$

Exercițiul 2. Se consideră triunghiul dreptunghic DEF ($\angle D = 90^\circ$).

- (a) Dacă $DE = 5$ cm și $EF = 10$ cm, aflați $m(\angle F)$ și lungimea catetei DF .
 (b) Dacă $DE = 6$ cm și $DF = 6\sqrt{3}$ cm, aflați $m(\angle E)$ și lungimea ipotenuzei EF .



$$a) \sin F = \frac{DE}{EF} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2} \Rightarrow m(\angle F) = 30^\circ$$

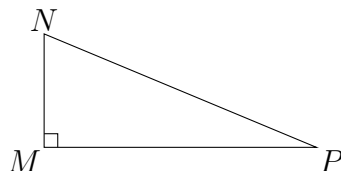
$$\cos F = \cos 30^\circ = \frac{DF}{EF} \Rightarrow \frac{DF}{10} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow DF = \frac{10\sqrt{3}}{2} = 5\sqrt{3} \text{ cm}$$

$$b) \tan E = \frac{DF}{DE} = \frac{6\sqrt{3}}{6} = \sqrt{3} \Rightarrow m(\angle E) = 60^\circ$$

$$\Delta DEF: m(\angle D) = 90^\circ \xRightarrow[\text{Teorema lui Pitagora}]{} EF^2 = DE^2 + DF^2 = 36 + 108 = 144 \Rightarrow EF = 12 \text{ cm}$$

Exercițiul 3. Fie triunghiul dreptunghic MNP cu $\angle M = 90^\circ$ și cateta $MN = 10$ cm. Știind că $\tan(\angle P) = \frac{5}{12}$:

- (a) Calculează lungimea catetei MP .
 (b) Determină perimetrul triunghiului MNP .



$$a) \tan P = \frac{MN}{MP} \Rightarrow MP = \frac{MN}{\tan P} = \frac{10}{\frac{5}{12}} = \frac{10 \cdot 12}{5} = 24 \text{ cm}$$

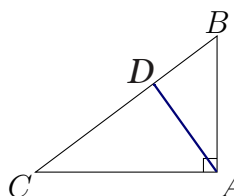
$$b) \Delta MNP: m(\angle M) = 90^\circ \xRightarrow[\text{Teorema lui Pitagora}]{} NP^2 = MN^2 + MP^2 = 100 + 576 = 676 \Rightarrow NP = 26 \text{ cm}$$

$$P_{MNP} = MN + NP + MP$$

$$P_{MNP} = 10 + 26 + 24 = 60 \text{ cm}$$

Exercițiul 4. În triunghiul dreptunghic ABC ($\angle A = 90^\circ$), se știe că $\cos B = 0,6$ și ipotenuza $BC = 20$ cm.

- (a) Calculează lungimile catetelor AB și AC .
 (b) Determină lungimea înălțimii AD ($D \in BC$) și ariei triunghiului.



$$a) \quad \left. \begin{array}{l} \cos B = \frac{AB}{BC} \\ \cos B = 0,6 \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{AB}{20} = 0,6 \Rightarrow AB = 20 \cdot 0,6 = 12 \text{ cm}$$

$$\triangle ABC: m(\angle A) = 90^\circ \xRightarrow[\text{Teorema lui Pitagora}]{} BC^2 = AB^2 + AC^2 \Rightarrow AC^2 = BC^2 - AB^2 = 400 - 144 = 256 \Rightarrow AC = 16 \text{ cm}$$

$$b) \quad \triangle ABD: m(\angle A) = 90^\circ \Rightarrow \cos B = \frac{BD}{AB} \Rightarrow 0,6 = \frac{BD}{12} \Rightarrow BD = 0,6 \cdot 12 = 7,2 \text{ cm}$$

$$\triangle ABD: m(\angle A) = 90^\circ \xRightarrow[\text{Teorema lui Pitagora}]{} AB^2 = BD^2 + AD^2$$

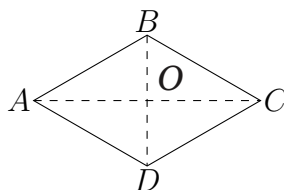
$$AD^2 = AB^2 - BD^2$$

$$AD^2 = 144 - 51,84$$

$$AD^2 = 92,16 \Rightarrow AD = 9,6 \text{ cm}$$

Exercițiul 5. Un romb $ABCD$ are latura de 12 cm și un unghi ascuțit ($\angle A$) de 60° .

- (a) Calculează lungimile diagonalelor AC și BD .
 (b) Determină aria rombului.



$$a) \quad \left. \begin{array}{l} m(\angle A) = 60^\circ \\ ABCD - \text{romb} \Rightarrow AB = AD \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle ABD - \text{echilateral} \Rightarrow BD = 12 \text{ cm}$$

Într-un romb, diagonalele sunt perpendiculare și se înjumătățesc în O .

$$ABCD - \text{romb} \Rightarrow m(\angle BAO) = m(\angle DAO) = \frac{m(\angle A)}{2} = \frac{60^\circ}{2} = 30^\circ$$

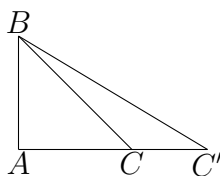
$$\triangle AOB: m(\angle AOB) = 90^\circ \Rightarrow \cos A = \frac{AO}{AB} \Rightarrow AO = AB \cdot \cos A = 12 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow AO = 6\sqrt{3}$$

$$AC = 2AO = 2 \cdot 6\sqrt{3} = 12\sqrt{3} \text{ cm}$$

$$b) \quad A_{ABCD} = \frac{AC \cdot BD}{2} = \frac{12\sqrt{3} \cdot 12}{2} = 72\sqrt{3} \text{ cm}^2$$

Exercițiul 6. Un stâlp vertical AB (A pe sol) este ancorat de un cablu BC (C pe sol). Cablul face cu solul un unghi de 45° . Dacă distanța de la baza stâlpului la punctul de ancorare este $AC = 8$ m:

- (a) Aflați înălțimea stâlpului AB .
 (b) Dacă dorim să schimbăm cablul cu unul care să facă un unghi de 30° cu solul (pentru a fi mai puțin abrupt), care va fi noua lungime a cablului?



a) $\triangle ABC$:

$$m(\angle A) = 90^\circ$$

$$\left. \begin{array}{l} m(\angle A) + m(\angle B) + m(\angle C) = 180^\circ \\ m(\angle C) = 45^\circ \end{array} \right\} \Rightarrow m(\angle B) = 180^\circ - m(\angle A) - m(\angle C)$$

$$m(\angle B) = 180^\circ - 90^\circ - 45^\circ = 45^\circ$$

$$m(\angle C) = m(\angle B) = 45^\circ \Rightarrow \triangle ABC - \text{dreptunghic isoscel} \Rightarrow AB = AC = 8 \text{ m}$$

b)

Fie AC' - noul cablu

$$m(\angle BC'A) = 30^\circ$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{În } \triangle ABC': \\ m(\angle A) = 90^\circ \end{array} \right\} \Rightarrow \sin C' = \frac{AB}{BC'}$$

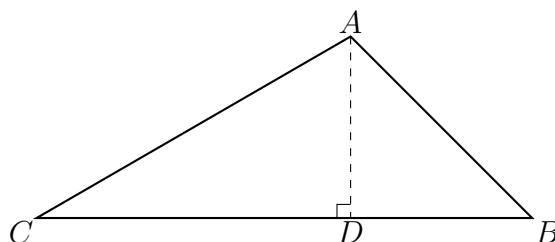
$$\left. \begin{array}{l} \sin C' = \sin 30^\circ = \frac{1}{2} \\ AB = 8 \text{ m} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{8}{BC'} = \frac{1}{2}$$

4

$$BC' = 8 \cdot 2 = 16 \text{ m}$$

Exercițiul 7. Fie triunghiul ABC cu $\angle A = 105^\circ$ și $\angle B = 45^\circ$. Se cunoaște latura $AC = 8$ cm.

- (a) Construiește înălțimea $AD \perp BC$ ($D \in BC$). Calculează lungimea înălțimii AD și a laturii AB .
 (b) Determină perimetrul triunghiului ABC .



a)

$$\text{În } \triangle ABC: m(\angle A) = 105^\circ \\ m(\angle B) = 45^\circ$$

$$m(\angle A) + m(\angle B) + m(\angle C) = 180^\circ$$

$$m(\angle C) = 180^\circ - m(\angle A) - m(\angle B) = 180^\circ - 105^\circ - 45^\circ = 30^\circ$$

$$\text{În } \triangle ADC: m(\angle D) = 90^\circ \Rightarrow \sin C = \frac{AD}{AC}$$

$$\sin C = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$$

$$AD = \sin C \cdot AC = \frac{1}{2} \cdot 8 = 4 \text{ cm}$$

$$\cos C = \frac{CD}{AC} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} \Rightarrow CD = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot AC = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 8 = 4\sqrt{3} \text{ cm}$$

$$\cos C = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{În } \triangle ADB: m(\angle D) = 90^\circ \Rightarrow \sin B = \frac{AD}{AB} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} \Rightarrow AB = \frac{AD}{\sin B} = \frac{4}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{4 \cdot 2}{\sqrt{2}} = \frac{8\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 8 \text{ cm}$$

$$\sin B = \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$AB = 4\sqrt{2} \text{ cm}$$

b) $BC = BD + DC$

5

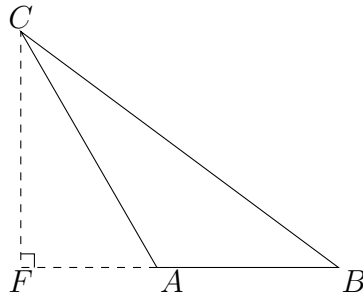
$$\triangle ADB: m(\angle A) = 180^\circ - m(\angle D) - m(\angle B) = 180^\circ - 90^\circ - 45^\circ = 45^\circ \Rightarrow \triangle ADB \text{ isoscel} \Rightarrow AB = AD$$

$$BC = (4 + 4\sqrt{3}) \text{ cm}$$

$$P_{ABC} = AB + BC + CA = 4\sqrt{2} + 4 + 4\sqrt{3} + 8 = (4\sqrt{2} + 4\sqrt{3} + 12) \text{ cm}$$

Exercițiul 8. În triunghiul obtuzunghic ABC ($\angle A > 90^\circ$), se cunosc: $AB = 6$ cm, $AC = 10$ cm și $m(\angle A) = 120^\circ$.

- Determină lungimea înălțimii CF duse din C pe dreapta AB ($F \in AB$ prelungit).
- Calculează lungimea laturii BC și aria triunghiului ABC .



a)

$$m(\angle CAF) = 180^\circ - m(\angle CAB)$$

$$m(\angle CAF) = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$$

În $\triangle CFA$:

$$m(\angle F) = 90^\circ \quad \left\{ \begin{array}{l} \Rightarrow \sin A = \frac{CF}{CA} \\ \Rightarrow CF = CA \cdot \sin A \end{array} \right.$$

$$\sin A = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$CF = 10 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$CF = 5\sqrt{3} \text{ cm}$$

b)

$$\cos A = \cos 60^\circ = \frac{1}{2} \quad \left\{ \begin{array}{l} \Rightarrow AF = \frac{1}{2} \cdot AC = \frac{1}{2} \cdot 10 = 5 \text{ cm} \\ \cos A = \frac{AF}{AC} \end{array} \right.$$

În $\triangle CFB$:

$$m(\angle F) = 90^\circ \quad \Rightarrow BC^2 = CF^2 + FB^2$$

$$FB = AF + AB = 5 + 6 = 11 \text{ cm}$$

$$BC^2 = (5\sqrt{3})^2 + 11^2 = 75 + 121 = 196 \Rightarrow BC = 14 \text{ cm}$$

$$A_{\triangle} = \frac{\text{baza} \cdot h}{2}$$

$$A_{ABC} = \frac{AB \cdot CF}{2}$$

$$A_{ABC} = \frac{6 \cdot 5\sqrt{3}}{2} = 15\sqrt{3} \text{ cm}^2$$