

Lecția 6 - Linia mijlocie în trapez

Clasa a 7-a – Capitolul Geometrie

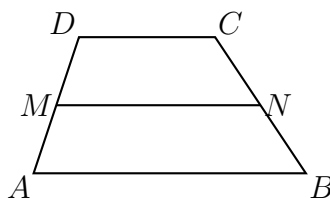
Instrucțiuni

Rezolvă exercițiile folosind proprietățile liniei mijlocii în trapez și Teorema lui Thales. Durata recomandată: **50 de minute**.

Exerciții

Exercițiul 1. Fie trapezul $ABCD$ cu $AB \parallel CD$ și $AB > CD$. Se cunosc lungimile bazelor: $AB = 24$ cm și $CD = 10$ cm. Punctele M și N sunt mijloacele laturilor AD , respectiv BC .

- Calculează lungimea liniei mijlocii MN .
- Dacă înălțimea trapezului este de 8 cm, calculează aria trapezului (folosind linia mijlocie).



$$\begin{array}{l} a) \quad \left. \begin{array}{l} M - \text{mijlocul lui } AD \\ N - \text{mijlocul lui } BC \end{array} \right\} \Rightarrow MN - \text{linie mijlocie} \end{array}$$

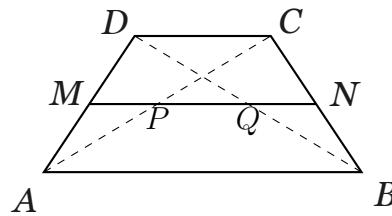
$$MN = \frac{AB + CD}{2} = \frac{24 + 10}{2} = \frac{34}{2} = 17 \text{ cm}$$

$$b) \quad ABCD - \text{trapez} \Rightarrow A_{ABCD} = \frac{(AB + CD) \cdot h}{2}$$

$$\left. \begin{array}{l} h = 8 \text{ cm} \\ MN = \frac{AB + CD}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow A_{ABCD} = MN \cdot h$$

$$A_{ABCD} = 17 \cdot 8 = 136 \text{ cm}^2$$

Exercițiul 2. Într-un trapez $ABCD$ ($AB \parallel CD$), linia mijlocie are lungimea de 18 cm, iar segmentul care unește mijloacele diagonalelor are lungimea de 4 cm. Determină lungimile celor două baze, AB și CD .



$$MN - \text{linie mijlocie} \Rightarrow MN = \frac{AB+CD}{2} \Rightarrow AB+CD = 2MN$$

$$AB+CD = 2 \cdot 18 = 36 \text{ cm} \quad (1) \Rightarrow CD = 36 - AB$$

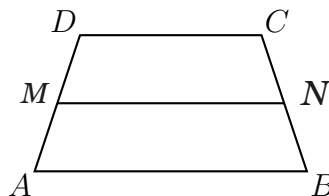
$$\begin{array}{l} M - \text{mijlocul lui } AD \\ Q - \text{mijlocul lui } BD \end{array} \Rightarrow MQ - \text{linie mijlocie} \Rightarrow MQ \parallel AB, MQ = \frac{AB}{2}$$

$$\begin{array}{l} M - \text{mijlocul lui } AD \\ P - \text{mijlocul lui } AC \end{array} \Rightarrow MP - \text{linie mijlocie} \Rightarrow MP \parallel CD, MP = \frac{CD}{2}$$

$$PQ = MQ - MP = \frac{AB-CD}{2} \Rightarrow AB-CD = 2PQ \Rightarrow AB-CD = 2 \cdot 4 = 8 \quad (2)$$

$$\begin{array}{l} \text{Adunăm (1) și (2)} \Rightarrow AB+CD + AB-CD = 36+8 \\ 2AB = 44 \mid :2 \Rightarrow AB = 22 \text{ cm} \\ CD = 36 - AB = 36 - 22 = 14 \text{ cm} \end{array}$$

Exercițiul 3. Se consideră trapezul isoscel $ABCD$ cu $AB \parallel CD$. Linia mijlocie a trapezului are lungimea de 15 cm, iar perimetrul trapezului este de 48 cm. Calculează lungimea laturilor neparalele.



$MN - \text{linie mijlocie}$

$$MN = \frac{AB+CD}{2} = 15 \Rightarrow AB+CD = 30 \text{ cm}$$

$$P = \underbrace{AB+CD}_{30} + AD + BC = 48 \text{ cm}$$

$$30 + AD + BC = 48 \mid -30 \Rightarrow AD + BC = 18$$

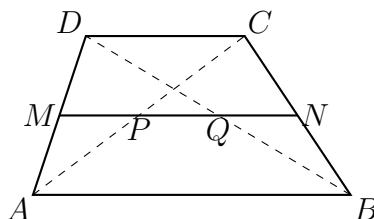
Deoarece trapezul este isoscel, laturile neparalele sunt congruente $\Rightarrow AD = BC$

$$2AD = 18 \mid :2$$

$$AD = 9 \text{ cm} \Rightarrow BC = 9 \text{ cm}$$

Exercițiul 4. Fie trapezul $ABCD$ cu $AB \parallel CD$, $AB = 20$ cm și $CD = 8$ cm. Punctele M și N sunt mijloacele laturilor AD , respectiv BC . Linia mijlocie MN intersectează diagonalele AC și BD în punctele P , respectiv Q .

- (a) Calculează lungimile segmentelor MP , NQ și PQ folosind proprietatea liniei mijlocii în triunghi.
- (b) Verifică dacă $MP = NQ$.



a) În $\triangle ADC$: M - mijlocul lui AD } $\Rightarrow MP \parallel CD$ (Teorema liniei mijlocii) P - mijlocul lui $AC \Rightarrow MP = \frac{CD}{2} = \frac{8}{2} = 4$ cm
 $MN \parallel CD$

În $\triangle BCD$: N - mijlocul lui BC } $\Rightarrow NQ \parallel CD$ (Teorema liniei mijlocii) Q - mijlocul lui $BD \Rightarrow NQ = \frac{CD}{2} = \frac{8}{2} = 4$ cm
 $MN \parallel CD$

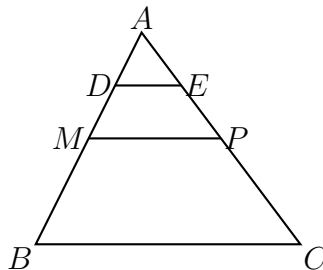
$$MN = \frac{AB + CD}{2} = \frac{20 + 8}{2} = 14 \text{ cm}$$

$$PQ = MN - MP - NQ = 14 - 4 - 4 = 6 \text{ cm}$$

b)

$$\begin{aligned} MP &= 4 \text{ cm} \\ NQ &= 4 \text{ cm} \end{aligned} \Rightarrow MP = NQ$$

Exercițiul 5. În triunghiul ABC , punctele D și E sunt situate pe laturile AB , respectiv AC , astfel încât $DE \parallel BC$. Fie M mijlocul lui AB și P mijlocul lui AC . Știind că D este mijlocul segmentului AM și E este mijlocul segmentului AP , demonstrează că $DE = \frac{1}{4}BC$ folosind proprietățile liniei mijlocii în triunghiurile AMP și ABC .



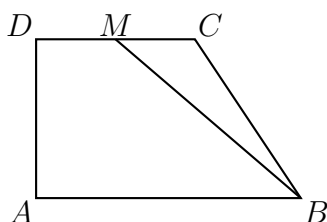
În $\triangle ABC$: M - mijlocul lui AB și P - mijlocul lui AC } $\Rightarrow MP \parallel BC$ (Teorema liniei mijlocii) $MP = \frac{1}{2} BC$

În $\triangle AMP$: D - mijlocul lui AM și E - mijlocul lui AP } $\Rightarrow DE \parallel MP$ (Teorema liniei mijlocii) $DE = \frac{1}{2} MP$

$$DE = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} BC \right) = \frac{1}{4} BC \Rightarrow DE = \frac{1}{4} BC$$

Exercițiul 6. Fie trapezul dreptunghic $ABCD$ cu $\angle A = \angle D = 90^\circ$ și $AB \parallel CD$. Bisectoarea unghiului $\angle ABC$ intersectează latura CD în mijlocul acesteia, punctul M .

- (a) Arată că triunghiul BMC este isoscel.
 (b) Dacă $AB = 10$ cm și $BC = 12$ cm, calculează lungimea liniei mijlocii a trapezului.



a) $AB \parallel CD$
 BM - secantă $\} \Rightarrow \angle ABM \equiv \angle BMC$ (alterne interne)

BM - bisectoarea $\angle ABC \Rightarrow \angle ABM \equiv \angle MBC$
 $\angle ABM \equiv \angle BMC \} \Rightarrow \angle MBC \equiv \angle BMC$

Un triunghi cu două unghiuri congruente este isoscel

În $\triangle BMC$:
 $\angle MBC \equiv \angle BMC \} \Rightarrow \triangle BMC$ - isoscel

b)

$\triangle BMC$ - isoscel $\Rightarrow MC = BC$
 $BC = 12$ cm $\} \Rightarrow MC = 12$ cm

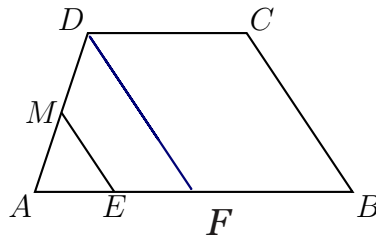
M - mijlocul lui $CD \Rightarrow CD = 2MC = 2 \cdot 12 = 24$ cm

Avem ambele baze $AB = 10$ cm și $BC = 12$ cm

$$l_m = \frac{AB + CD}{2} = \frac{10 + 24}{2} = \frac{34}{2} = 17 \text{ cm}$$

Exercițiul 7. Fie trapezul $ABCD$ cu $AB \parallel CD$. Fie M mijlocul laturii AD . Prin M se duce o paralelă la latura ne paralelă BC , care intersectează baza mare AB în punctul E .

- (a) Construiește o paralelă prin D la BC pentru a demonstra relația dintre AE , AB și CD .
 (b) Demonstrează că $AE = \frac{AB-CD}{2}$.



a)

Ducem prin D o dreaptă paralelă cu BC care intersectează AB în F .
 Patrulaterul $FBCD$ are laturile opuse paralele: $DC \parallel FB$ și $DF \parallel CB \Rightarrow$
 $\Rightarrow FBCD$ - paralelogram $\Rightarrow \begin{cases} FB = DC \\ DF = CB \end{cases}$

b)

În $\triangle ADF$:

M - mijlocul lui AD $\left. \begin{array}{l} \Rightarrow \\ \text{Teorema} \\ \text{lui} \\ \text{Thales} \end{array} \right\} E - \text{mijlocul lui } AF \Rightarrow ME - \text{linia mijlocie în } \triangle ADF$
 $ME \parallel BC \Rightarrow ME \parallel DF$
 $DF \parallel BC$

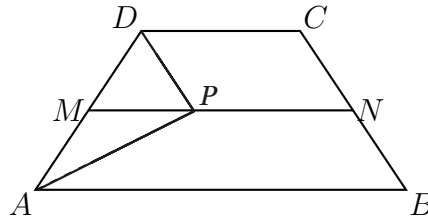
$$\begin{aligned} AF &= AB - FB \\ FB &= CD \end{aligned} \Rightarrow AF = AB - CD$$

$$E - \text{mijlocul lui } AF \Rightarrow AE = \frac{AF}{2} \Rightarrow AF = 2AE$$

$$\begin{aligned} 2AE &= AB - CD \quad | : 2 \\ AE &= \frac{AB - CD}{2} \end{aligned}$$

Exercițiul 8. În trapezul $ABCD$ ($AB \parallel CD$), bisectoarele unghiurilor $\angle A$ și $\angle D$ se intersectează în punctul P .

- (a) Demonstrează că triunghiul APD este dreptunghic.
 (b) Arată că punctul P aparține liniei mijlocii a trapezului.



a)
 Unghiurile $\angle A$ și $\angle D$ sunt de aceeași parte a scantei AD între paralelele AB și CD , deci sunt suplementare.

$$m(\angle DAB) + m(\angle ADC) = 180^\circ$$

$$AP \text{ și } DP - \text{bisectoare} \Rightarrow m(\angle PAD) = \frac{m(\angle DAB)}{2}$$

$$m(\angle PDA) = \frac{m(\angle ADC)}{2}$$

În $\triangle APD$:

$$m(\angle PAD) + m(\angle PDA) = \frac{180^\circ}{2} = 90^\circ$$

$$m(\angle APD) = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ \Rightarrow \triangle APD - \text{dreptunghic}$$

b)
 Prin P ducem o paralelă cu bazele trapezului. Notăm cu M intersecția acestei drepte cu $AD \Rightarrow MP \parallel AB \parallel CD$

În $\triangle MAP$:

$$\left. \begin{array}{l} MP \parallel AB \\ AP - \text{scantă} \end{array} \right\} \Rightarrow \angle MPA \equiv \angle PAB \text{ (alterne interne)}$$

$$\left. \begin{array}{l} AP - \text{bisectoare} \Rightarrow \angle PAB \equiv \angle MAP \\ \angle MPA \equiv \angle PAB \end{array} \right\} \Rightarrow \angle MPA \equiv \angle MAP \Rightarrow \triangle MAP - \text{isoscel} \Rightarrow MA = MP$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{În } \triangle MDP: \\ MP \parallel CD \\ DP - \text{scantă} \end{array} \right\} \Rightarrow \angle MPD \equiv \angle PDC \text{ (alterne interne)}$$

$$\left. \begin{array}{l} DP - \text{bisectoare} \Rightarrow \angle PDC \equiv \angle MDP \\ \angle MPD \equiv \angle PDC \end{array} \right\} \Rightarrow \angle MDP \equiv \angle MPD \Rightarrow \triangle MDP - \text{isoscel} \Rightarrow MD = MP \Rightarrow \left. \begin{array}{l} MD = MA \\ MA = MP \end{array} \right\} \Rightarrow MD = MP$$

$MD = MA \Rightarrow M$ - mijlocul lui AD
 MP trece prin mijlocul lui AD și este $\parallel$ cu AB și CD $\Rightarrow MP$ - linie mijlocie $\Rightarrow P$ aparține liniei mijlocii a trapezului