

Lecția 5 – Trunchiul de piramidă regulată

Clasa a 8-a – Capitolul 2 – Aree și volume ale unor corpuri geometrice

Instrucțiuni

Rezolvă exercițiile folosind formulele pentru trunchiul de piramidă regulată (aria laterală, aria totală, volumul) și relațiile dintre elemente. *Reține:* $A_l = \frac{(P_B + P_b) \cdot a_{tr}}{2}$, $V = \frac{h}{3}(A_B + A_b + \sqrt{A_B \cdot A_b})$, $a_{tr}^2 = h^2 + (a_B - a_b)^2$. Durata recomandată: **50 minute**.

Exerciții

Exercițiul 1. Un trunchi de piramidă patrulateră regulată are latura bazei mari $L = 10$ cm, latura bazei mici $l = 4$ cm și apotema trunchiului $a_{tr} = 5$ cm. Calculați aria laterală a trunchiului.

Exercițiul 2. Un trunchi de piramidă triunghiulară regulată are ariile bazelor $A_B = 36\sqrt{3}$ cm² și $A_b = 9\sqrt{3}$ cm², iar înălțimea $h = 4$ cm. Calculați volumul trunchiului.

Exercițiul 3. Un trunchi de piramidă patrulateră regulată are laturile bazelor $L = 14$ cm și $l = 6$ cm, iar apotema trunchiului este de 5 cm. Calculați înălțimea trunchiului.

Exercițiul 4. Într-un trunchi de piramidă patrulateră regulată, diferența dintre apotema bazei mari și apotema bazei mici este de 3 cm. Știind că apotema trunchiului este de 5 cm, calculați înălțimea trunchiului și volumul acestuia, dacă latura bazei mici este $l = 4$ cm.

Exercițiul 5. Un trunchi de piramidă triunghiulară regulată provine dintr-o piramidă cu înălțimea de 12 cm. Planul de secțiune se află la distanța de 4 cm față de vârful piramidei. Dacă latura bazei mari a trunchiului este de 18 cm, calculați latura bazei mici și raportul volumelor ($\frac{V_{trunchi}}{V_{piramida_mica}}$).

Exercițiul 6. Fie $ABCD A' B' C' D'$ un trunchi de piramidă patrulateră regulată cu $L = 12$ cm, $l = 4$ cm și înălțimea $h = 4\sqrt{2}$ cm.

- Calculați lungimea diagonalei trunchiului (AC').
- Calculați aria totală a trunchiului.

Exercițiul 7. Un trunchi de piramidă triunghiulară regulată are laturile bazelor 12 cm și 6 cm. Fața laterală formează cu planul bazei mari un unghi de 60° .

- (a) Calculați înălțimea trunchiului.
- (b) Calculați distanța de la centrul bazei mari la o față laterală.

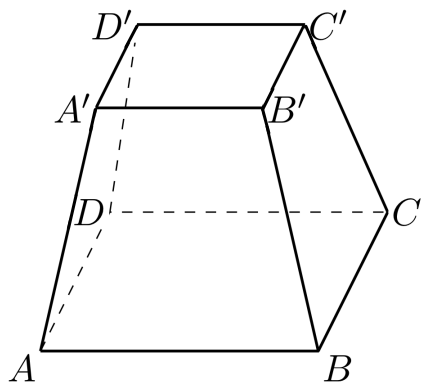
Exercițiul 8. Se consideră un trunchi de piramidă patrulateră regulată în care secțiunea diagonală ($ACC'A'$) este un trapez isoscel cu aria de $48\sqrt{2} \text{ cm}^2$ și înălțimea de $4\sqrt{2} \text{ cm}$. Știind că diagonala bazei mici este jumătate din diagonala bazei mari ($A'C' = \frac{1}{2}AC$), calculați:

- (a) Volumul trunchiului de piramidă.
- (b)  unghiului format de muchia laterală cu planul bazei mari.

Tangenta

Succes!

Exercițiul 1. Un trunchi de piramidă patrulateră regulată are latura bazei mari $L = 10$ cm, latura bazei mici $l = 4$ cm și apotema trunchiului $a_{tr} = 5$ cm. Calculați aria laterală a trunchiului.



$$A_l = \frac{(P_B + P_b) \cdot a_t}{2}$$

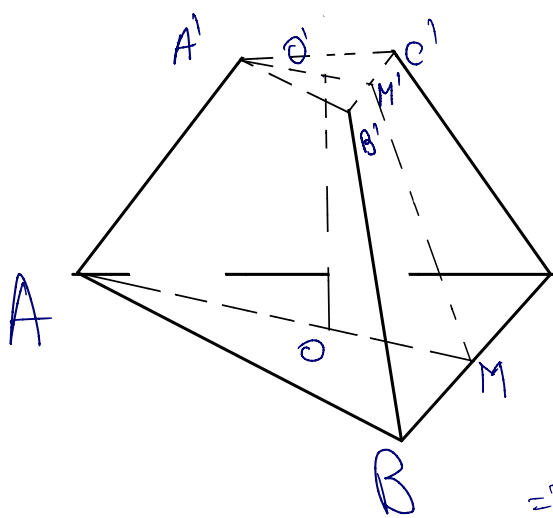
$$P_B = 4 \cdot L = 4 \cdot 10 = 40 \text{ cm}$$

$$P_b = 4 \cdot l = 4 \cdot 4 = 16 \text{ cm}$$

$$a_t = 5 \text{ cm}$$

$$\Rightarrow A_l = \frac{(40 + 16) \cdot 5}{2} = \frac{280}{2} = 140 \text{ cm}^2$$

Exercițiul 2. Un trunchi de piramidă triunghiulară regulată are ariile bazelor $A_B = 36\sqrt{3} \text{ cm}^2$ și $A_b = 9\sqrt{3} \text{ cm}^2$, iar înălțimea $h = 4$ cm. Calculați volumul trunchiului.



$$V = \frac{h}{3} (A_B + A_b + \sqrt{A_B \cdot A_b})$$

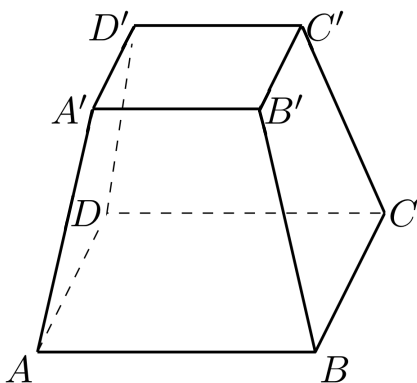
$$\Rightarrow V = \frac{4}{3} (36\sqrt{3} + 9\sqrt{3} + \sqrt{36\sqrt{3} \cdot 9\sqrt{3}})$$

$$V = \frac{4}{3} (45\sqrt{3} + \sqrt{36 \cdot 9 \cdot 3})$$

$$V = \frac{4}{3} (45\sqrt{3} + 6 \cdot 3\sqrt{3}) = \frac{4}{3} (45\sqrt{3} + 18\sqrt{3})$$

$$\Rightarrow V = \frac{4}{3} \cdot 63\sqrt{3} \Rightarrow V = 84\sqrt{3} \text{ cm}^3$$

Exercițiul 3. Un trunchi de piramidă patrulateră regulată are laturile bazelor $L = 14$ cm și $l = 6$ cm, iar apotema trunchiului este de 5 cm. Calculați înălțimea trunchiului.



$$a_t^2 = R^2 + (a_B - a_b)^2$$

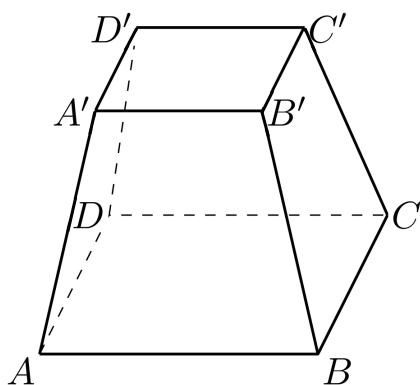
$$a_B = \frac{L}{2} = \frac{14}{2} = 7 \text{ cm}$$

$$a_b = \frac{l}{2} = \frac{6}{2} = 3 \text{ cm}$$

$$\Rightarrow 5^2 = R^2 + (7 - 3)^2 \Rightarrow R^2 = 5^2 - 4^2 = 25 - 16 = 9$$

$$\Rightarrow R = \sqrt{9} \Rightarrow R = 3 \text{ cm}$$

Exercițiul 4. Într-un trunchi de piramidă patrulateră regulată, diferența dintre apotema bazei mari și apotema bazei mici este de 3 cm. Știind că apotema trunchiului este de 5 cm, calculați înălțimea trunchiului și volumul acestuia, dacă latura bazei mici este $l = 4$ cm.



$$a_B - a_b = 3$$

$$a_t^2 = R^2 + (a_B - a_b)^2 \Rightarrow 5^2 = R^2 + 3^2$$

$$\Rightarrow R^2 = 25 - 9 = 16 \Rightarrow R = \sqrt{16} = 4 \text{ cm}$$

$$l = 4 \Rightarrow A_b = l^2 = 4^2 = 16 \text{ cm}^2$$

$$l = 4 \Rightarrow a_b = \frac{l}{2} = 2 \text{ cm}$$

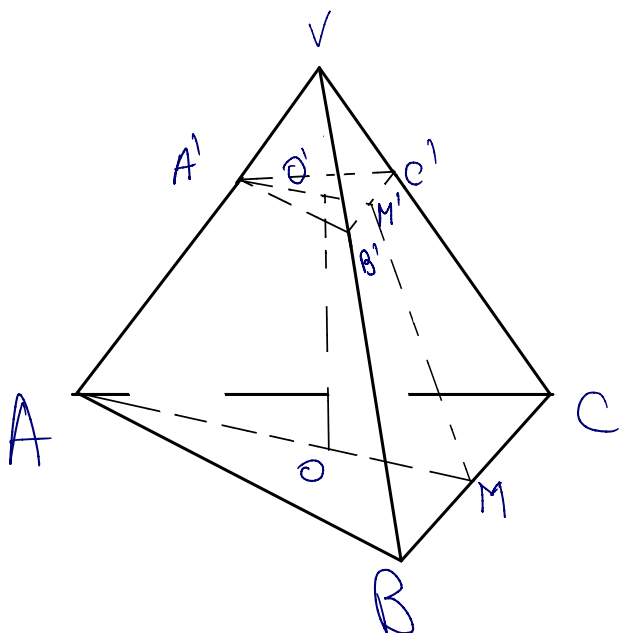
$$a_B - a_b = 3 \Rightarrow a_B = a_b + 3 = 2 + 3 = 5 \text{ cm}$$

$$a_B = \frac{L}{2} \Rightarrow L = 2 \cdot a_B = 2 \cdot 5 = 10 \text{ cm} \Rightarrow A_B = L^2 = 10^2 = 100 \text{ cm}^2$$

$$V = \frac{R}{3} (A_B + A_b + \sqrt{A_B \cdot A_b}) = \frac{4}{3} (100 + 16 + \sqrt{100 \cdot 16}) = \frac{4}{3} (116 + \sqrt{100} \cdot \sqrt{16})$$

$$V = \frac{4}{3} (116 + 10 \cdot 4) = \frac{4}{3} (116 + 40) = \frac{4}{3} \cdot 156 = 208 \text{ cm}^3$$

Exercițiul 5. Un trunchi de piramidă triunghiulară regulată provine dintr-o piramidă cu înălțimea de 12 cm. Planul de secțiune se află la distanța de 4 cm față de vârful piramidei. Dacă latura bazei mari a trunchiului este de 18 cm, calculați latura bazei mici și raportul volumelor ($\frac{V_{\text{trunchi}}}{V_{\text{piramida mica}}}$).



$$\text{Raportul de asemănare: } R = \frac{R_{\text{mare}}}{R_{\text{mic}}}$$

$$= \frac{VO}{VO'} = \frac{12}{4} = 3$$

$$\frac{AB}{A'B'} = R \Rightarrow \frac{18}{A'B'} = 3 \Rightarrow A'B' = \frac{18}{3} = 6 \text{ cm}$$

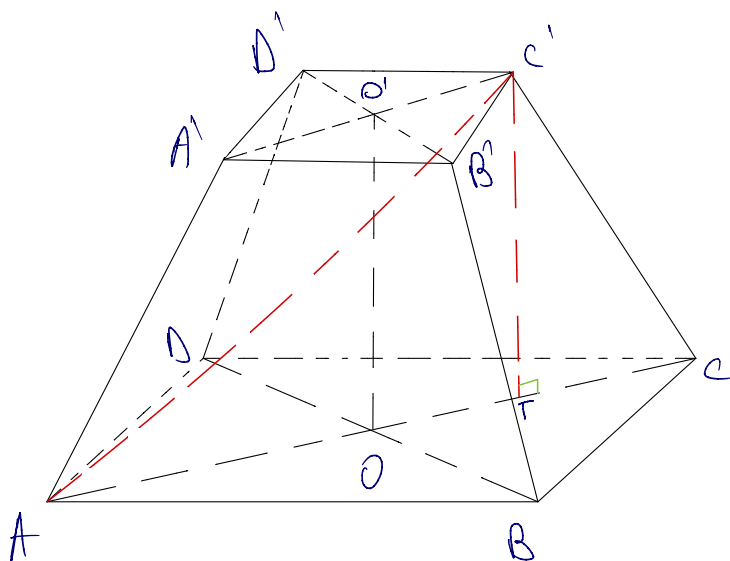
$$\frac{V_{ABC}}{V_{A'B'C'}} = R^3 = 3^3 = 27 \Rightarrow V_{ABC} = 27 \cdot V_{A'B'C'}$$

$$V_{\text{trunchi}} = V_{ABC} - V_{A'B'C'} = 27 \cdot V_{A'B'C'} - V_{A'B'C'}$$

$$\Rightarrow V_{\text{trunchi}} = 26 \cdot V_{A'B'C'} / V_{A'B'C'}$$

$$\Rightarrow \frac{V_{\text{trunchi}}}{V_{A'B'C'}} = 26$$

(b) Calculați aria totală a trunchiului.


$$\left. \begin{array}{l} O'O \perp AC \\ C'T \perp AC \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} O'O \parallel C'T \\ O'C' \parallel OT \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} O'C'OT \\ \text{parallelogram} \end{array}$$

$$\Rightarrow OT = O'C' \text{ di } C'T = O'O = R = 4\sqrt{2} \text{ cm}$$

$$O'C' = \frac{A'e'}{2} = \frac{4\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2} \text{ cm}$$

$$\Rightarrow OT = 2\sqrt{2} \text{ cm}$$

$$A^T = A^0 + O^T$$

$$AO = \frac{AC}{2} = \frac{L\sqrt{2}}{2} = \frac{12\sqrt{2}}{2} = 6\sqrt{2} \text{ cm} \Rightarrow AT = 6\sqrt{2} + 2\sqrt{2} = 8\sqrt{2} \text{ cm}$$

In ΔCTA dreptunghic aplic T.P.: $AC'^2 = AT^2 + TC'^2 \Rightarrow$

$$\Rightarrow AC' = \sqrt{(8\sqrt{2})^2 + (4\sqrt{2})^2} = \sqrt{128 + 32} = \sqrt{160} = \sqrt{16} \cdot \sqrt{10} = 4\sqrt{10} \text{ cm}$$

$$\Rightarrow Ac' = 4\sqrt{10} \text{ cm}$$

b) $A_t = A_e + A_g + A_B$

$$A_a = \ell^2 = 4^2 = 16 \text{ cm}^2$$

$$A_B = L^2 = 12^2 = 144 \text{ cm}^2$$

$$A_e = \frac{(P_B + P_e) \cdot A_t}{2}$$

$$a_t^2 = R^2 + (a_B - a_B)^2 = (4\sqrt{2})^2 + \left(\frac{L}{2} - \frac{L}{2}\right)^2 = 16 \cdot 2 + \left(\frac{12}{2} - \frac{4}{2}\right)^2 =$$

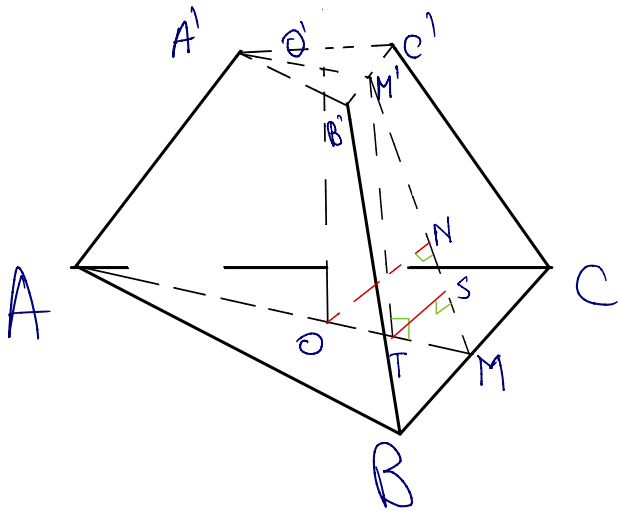
$$\Rightarrow a_t^2 = 32 + (6-2)^2 = 32 + 4^2 = 32 + 16 = 48 \Rightarrow a_t = \sqrt{48} = 4\sqrt{3} \text{ cm}$$

$$P_B = 4L = 4 \cdot 12 = 48 \text{ cm}; \quad P_G = 4l = 4 \cdot 4 = 16 \text{ cm}$$

$$A_{\text{el}} = \frac{(48+16) \cdot 4\sqrt{3}}{2} = 64 \cdot 2\sqrt{3} = 128\sqrt{3} \text{ cm}^2$$

$$\Rightarrow A_t = 128\sqrt{3} + 16 + 144 \Rightarrow A_t = 160 + 128\sqrt{3} \text{ cm}^2$$

(b) Calculați distanța de la centrul bazei mari la o față laterală.



$$\left. \begin{aligned} &\Rightarrow \chi(ABC, BCB') \\ &= \chi(MM, AM) \\ &= \chi MMA \\ &= 60^\circ \end{aligned} \right\}$$

File MIT_LAM_TEAM.

$$\left. \begin{array}{l} TM = OM - OT \\ OT = O'M' \end{array} \right\} \Rightarrow TM = OM - O'M' = \frac{1\sqrt{3}}{6} - \frac{2\sqrt{3}}{6} = \frac{1\sqrt{3}}{6} - \frac{2\sqrt{3}}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{6}$$

Im $\Delta M'TN$ dreieckig: $\tan M'TN = \frac{MT}{TN} \Rightarrow \tan 60^\circ = \frac{R}{\sqrt{3}} \Rightarrow \sqrt{3} = \frac{R}{\sqrt{3}}$

$$\Rightarrow h = 3 \text{ cm}$$

b) File ON LN^1M, NEN^1M .

$Bc \perp N'M$

$BC \perp AM$

$$M^1M \cap AM = \{M\}$$

$$N^1M, AM \subset (A^1N^1MA)$$

$$\Rightarrow BC \perp (A'M'MA)$$

$$\partial N \subset (A' \cup N' \cup MA)$$

BC 10N

$$ON \perp M'N$$

$$BC \cap M' M = \{M\}$$

$$BC, MM \in (B^1 B^2 c e^1)$$

$$\Rightarrow ON \perp (B' B C C') \Rightarrow d(O, (B' B C C')) = ON$$

Fig $TS \perp N'M$, $S \in N'M$. In $\triangle ONM$:

Fig $TS \perp MN$, $S \in MN$. În $\triangle ONM$:
Cumm $OT = TM = \sqrt{3}$ și $TS \parallel ON$ (perpendiculare pe aceeași dreaptă) $\Rightarrow$

$\Rightarrow NS = SM$ și TS linie mijlocie în $\triangle ONM \Rightarrow ON = 2 \cdot TS$

$$\hat{I}_m \Delta M' T M \text{ draptungRic: } TS = \frac{M' T \cdot T M}{M' M}$$

$$M'M = a_t = \sqrt{R^2 + (a_B - a_G)^2} = \sqrt{3^2 + (2\sqrt{3} - \sqrt{3})^2} = \sqrt{9+3} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$

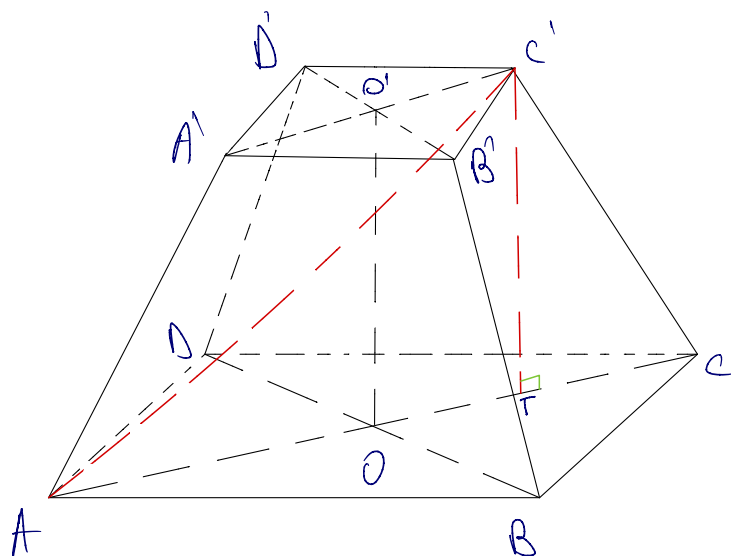
$$\Rightarrow TS = \frac{3 \cdot \sqrt{3}}{2 \sqrt{3}} = \frac{3}{2} \Rightarrow ON = 2 \cdot \frac{3}{2} = 3 \text{ cm}$$

Exercițiul 8. Se consideră un trunchi de piramidă patrulateră regulată în care secțiunea diagonală ($ACC'A'$) este un trapez isoscel cu aria de $48\sqrt{2} \text{ cm}^2$ și înălțimea de $4\sqrt{2} \text{ cm}$. Știind că diagonala bazei mici este jumătate din diagonala bazei mari ($A'C' = \frac{1}{2}AC$), calculați:

(a) Volumul trunchiului de piramidă.

(b) unghiul unghiului format de muchia laterală cu planul bazei mari.

Tangenta



a) Fie $C'T \perp AC, T \in AC$.

$$A_{ACC'A'} = 48\sqrt{2}$$

$$A_{ACC'A'} = \frac{(A'C' + AC) \cdot C'T}{2}$$

$$C'T = 4\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow \frac{4\sqrt{2}(A'C' + AC)}{2} = 48\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow 2(A'C' + AC) = 48 / : 2 \Rightarrow A'C' + AC = 24 \quad \left. \begin{array}{l} \text{dan } AC = 2 \cdot A'C' \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} 3 \cdot A'C' = 24 / : 3 \\ A'C' = 8 \text{ și } AC = 2 \cdot 8 = 16 \text{ cm} \end{array}$$

$$A'C' = 8 \Rightarrow A'B' = \frac{8}{\sqrt{2}} = \frac{8\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 4\sqrt{2} \text{ cm} \Rightarrow A_B = A'B'^2 = (4\sqrt{2})^2 = 32 \text{ cm}^2$$

$$AC = 16 \Rightarrow AB = \frac{16}{\sqrt{2}} = \frac{16\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 8\sqrt{2} \text{ cm} \Rightarrow A_B = AB^2 = (8\sqrt{2})^2 = 128 \text{ cm}^2$$

$$O'O = C'T = 4\sqrt{2} = R$$

$$V = \frac{R}{3} (A_B + A_{B'} + \sqrt{A_B A_{B'}}) = \frac{4\sqrt{2}}{3} (128 + 32 + \sqrt{128 \cdot 32}) = \frac{4\sqrt{2}}{3} \cdot (160 + 8\sqrt{2} \cdot 4\sqrt{2})$$

$$V = \frac{4\sqrt{2}}{3} (160 + 64) = \frac{4\sqrt{2}}{3} \cdot 224 = \frac{896\sqrt{2}}{3} \text{ cm}^3$$

$$b) \left. \begin{array}{l} \rho_{(ABCD)}^{C'} = T \\ \rho_{(ABCD)}^{C} = C \end{array} \right\} \Rightarrow \rho_{(ABCD)}^{C'C} = CT \Rightarrow \angle(C'C, (ABCD)) = \angle(C'C, CT) = \angle C'CT$$

$$OT = O'C' = \frac{A'C'}{2} = \frac{8}{2} = 4 \text{ cm}$$

$$OC = \frac{AC}{2} = \frac{16}{2} = 8 \text{ cm}$$

$$TC = OC - OT = 8 - 4 = 4 \text{ cm}$$

$$\text{În } \triangle C'TC \text{ dreptunghic: } \tan \hat{C'CT} = \frac{C'T}{TC} = \frac{4\sqrt{2}}{4} = \sqrt{2}$$