

Lecția 4 - Noțiuni de trigonometrie

Clasa a 7-a – Capitolul Geometrie

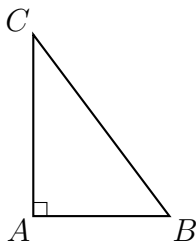
Instrucțiuni

Folosește definițiile funcțiilor trigonometrice în triunghiul dreptunghic:

$\sin x = \frac{\text{cateta opusă}}{\text{ipotenuză}}$, $\cos x = \frac{\text{cateta alăturată}}{\text{ipotenuză}}$, $\operatorname{tg} x = \frac{\text{cateta opusă}}{\text{cateta alăturată}}$ și $\operatorname{ctg} x = \frac{\text{cateta alăturată}}{\text{cateta opusă}}$. Durata recomandată: **50 de minute**.

Exerciții

Exercițiul 1. Se consideră triunghiul ABC dreptunghic în A . Știind că ipotenusa $BC = 25$ cm și $\sin B = \frac{4}{5}$, calculează lungimile catetelor AC și AB , iar apoi determină $\operatorname{tg} C$.



$$\triangle ABC: \left. \begin{array}{l} m(\angle A) = 90^\circ \end{array} \right\} \Rightarrow \sin B = \frac{AC}{BC}$$

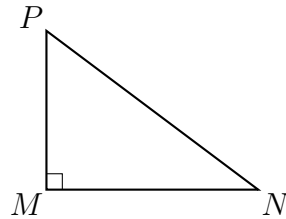
$$\sin B = \frac{4}{5} \Rightarrow \frac{AC}{BC} = \frac{4}{5} \Rightarrow \frac{AC}{25} = \frac{4}{5} \Rightarrow AC = \frac{4 \cdot 25}{5} = \frac{100}{5} = 20 \text{ cm}$$

$$\triangle ABC: \left. \begin{array}{l} m(\angle A) = 90^\circ \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Teorema} \\ \text{lui} \\ \text{Pitagora} \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} BC^2 = AB^2 + AC^2 \Rightarrow AB^2 = BC^2 - AC^2 \\ AB^2 = 625 - 400 \Rightarrow \sqrt{AB^2} = \sqrt{225} \Rightarrow AB = 15 \text{ cm} \end{array}$$

$$\operatorname{tg} C = \frac{AB}{AC}$$

$$\operatorname{tg} C = \frac{15}{20} = \frac{3}{4} = 0,75$$

Exercițiul 2. În triunghiul dreptunghic MNP cu $\angle M = 90^\circ$, se știe că cateta $MN = 12$ cm și $\cos N = 0,6$. Calculează lungimea ipotenuzei NP , a catetei MP și perimetrul triunghiului.



$$\triangle MNP: m(\angle M) = 90^\circ \Rightarrow \cos N = \frac{MN}{NP} \Rightarrow NP = \frac{MN}{\cos N} = \frac{12}{0,6} = \frac{12}{6 \cdot 10^{-1}} = \frac{12 \cdot 10}{6}$$

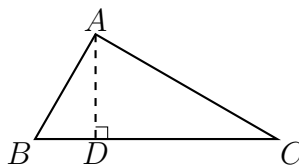
$$NP = 20 \text{ cm}$$

$$\triangle MNP: m(\angle M) = 90^\circ \xRightarrow[\text{Teorema lui Pitagora}]{} NP^2 = MN^2 + MP^2 \Rightarrow MP^2 = NP^2 - MN^2 = 400 - 144$$

$$MP^2 = 256 \Rightarrow MP = 16 \text{ cm}$$

$$P_{MNP} = MN + NP + MP = 12 + 20 + 16 = 48 \text{ cm}$$

Exercițiul 3. Fie triunghiul ABC cu $\angle A = 90^\circ$ și înălțimea $AD \perp BC$, $D \in BC$. Dacă $AC = 10$ cm și măsura $\angle C = 30^\circ$, calculează lungimea ipotenuzei BC și lungimea înălțimii AD .



$$\triangle ABC: m(\angle A) = 90^\circ \Rightarrow \cos C = \frac{AC}{BC} \Rightarrow \cos 30^\circ = \frac{AC}{BC}$$

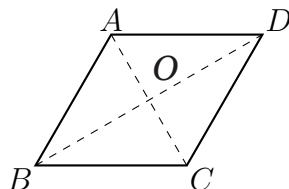
$$\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \frac{AC}{BC} = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \left. \begin{array}{l} AC = 10 \text{ cm} \end{array} \right\} \Rightarrow BC = \frac{2 \cdot 10}{\sqrt{3}} = \frac{20}{\sqrt{3}} = \frac{20\sqrt{3}}{3} \text{ cm}$$

$$\triangle ADC: \quad \left. \begin{array}{l} AD \perp BC, D \in BC \end{array} \right\} \Rightarrow m(\angle ADC) = 90^\circ$$

$$\triangle ADC: m(\angle ADC) = 90^\circ \Rightarrow \sin C = \frac{AD}{AC} \quad \left. \begin{array}{l} \sin 30^\circ = \frac{1}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{AD}{10} = \frac{1}{2} \Rightarrow 2AD = 10 \quad | :2$$

$$AD = 5 \text{ cm}$$

Exercițiul 4. Un romb $ABCD$ are latura de 12 cm și măsura unghiului $\angle ABC = 60^\circ$. Folosind funcțiile trigonometrice, calculează lungimile celor două diagonale ale rombului (AC și BD).



$$\left. \begin{array}{l} \text{Fie } \{O\} = AC \cap BD \\ ABCD - \text{romb} \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} AC \perp BD \\ m(\angle ABO) = m(\angle CBO) = \frac{m(\angle ABC)}{2} = \frac{60^\circ}{2} = 30^\circ \end{array}$$

$$\Delta AOB: m(\angle O) = 90^\circ \Rightarrow \sin B = \frac{AO}{AB}$$

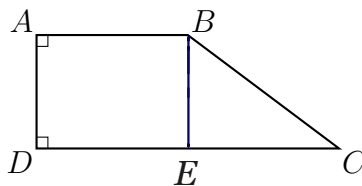
$$\sin 30 = \frac{AO}{AB} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{AO}{12} \Rightarrow AO = \frac{12}{2} = 6 \text{ cm}$$

$$AC = 2AO = 2 \cdot 6 = 12 \text{ cm}$$

$$\cos B = \frac{BO}{AB} \Rightarrow \cos 30 = \frac{BO}{12} \Rightarrow BO = \cos 30 \cdot 12 = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 12 = 6\sqrt{3} \text{ cm}$$

$$BD = 2BO = 2 \cdot 6\sqrt{3} = 12\sqrt{3} \text{ cm}$$

Exercițiul 5. Se consideră trapezul dreptunghic $ABCD$ cu $AB \parallel CD$, $AB < CD$ și $\angle A = \angle D = 90^\circ$. Știind că baza mare $CD = 16$ cm, înălțimea $AD = 6$ cm și $\text{tg} C = 0,75$, calculează lungimea bazei mici AB și a laturii neperalele BC .



Observăm $BE \perp DC$, $E \in DC \Rightarrow m(\angle DEB) = 90^\circ$

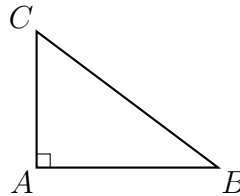
$$\left. \begin{array}{l} m(\angle DAB) = 90^\circ \\ m(\angle ADE) = 90^\circ \\ m(\angle DEB) = 90^\circ \end{array} \right\} \Rightarrow ABED - \text{dreptunghi} \Rightarrow \begin{array}{l} BE = AD = 6 \text{ cm} \\ AB = DE \end{array}$$

$$\text{În } \Delta BEC: m(\angle E) = 90^\circ \Rightarrow \text{tg} C = \frac{BE}{EC} \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{6}{EC} = \frac{3}{4} \\ EC = \frac{24}{3} = 8 \text{ cm} \end{array} \right.$$

$$AB = DE = DC - EC = 16 - 8 = 8 \text{ cm}$$

$$\text{În } \Delta BEC: m(\angle E) = 90^\circ \Rightarrow \begin{array}{l} \text{Teorema} \\ \text{lui} \\ \text{Pitagora} \end{array} \quad \begin{array}{l} BC^2 = BE^2 + EC^2 \\ BC^2 = 36 + 64 = 100 \\ BC = 10 \text{ cm} \end{array}$$

Exercițiul 6. În triunghiul ABC dreptunghic în A , aria este egală cu 24 cm^2 . Știind că $\text{tg} B = 0,75$, determină lungimile laturilor AB , AC și BC .



$$\left. \begin{array}{l} \text{tg } B = \frac{AC}{AB} \\ \text{tg } B = 0,75 = \frac{3}{4} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{AC}{AB} = \frac{3}{4} \Rightarrow AC = \frac{3}{4} AB$$

$$A = \frac{AB \cdot AC}{2} = 24 \Rightarrow AB \cdot AC = 48$$

$$AB \cdot \frac{3}{4} AB = 48 \quad \left| \cdot \frac{4}{3} \Rightarrow AB^2 = 64 \Rightarrow AB = 8 \text{ cm} \Rightarrow AC = \frac{3}{4} \cdot 8 = \frac{24}{4} = 6 \text{ cm} \right.$$

$\triangle ABC$: $m(\angle A) = 90^\circ \xRightarrow[\text{Teorema lui Pitagora}]{} BC^2 = AB^2 + AC^2 = 64 + 36 = 100$
 $BC = 10 \text{ cm}$

Exercițiul 7. Fie x măsura unui unghi ascuțit al unui triunghi dreptunghic pentru care se știe că $\text{ctg} x = 2$. Fără a afla lungimile laturilor, calculează valoarea raportului:

$$E = \frac{2 \sin x + 3 \cos x}{5 \cos x - \sin x}$$

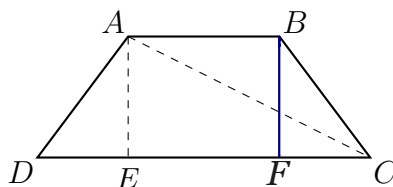
Împărțim numărătorul și numitorul la $\sin x$

$$\text{ctg } x = \frac{\cos x}{\sin x}$$

$$E = \frac{2 \sin x + 3 \cos x}{5 \cos x - \sin x} = \frac{\cancel{2 \sin x} + 3 \frac{\cos x}{\sin x}}{5 \frac{\cos x}{\sin x} - \cancel{\sin x}} = \frac{2 + 3 \text{ctg } x}{5 \text{ctg } x - 1}$$

$$\text{ctg } x = 2 \Rightarrow E = \frac{2 + 3 \cdot 2}{5 \cdot 2 - 1} = \frac{2 + 6}{10 - 1} = \frac{8}{9}$$

Exercițiul 8. Se consideră trapezul isoscel $ABCD$ cu $AB \parallel CD$. Știind că bazele sunt $AB = 10$ cm, $CD = 22$ cm și latura neparalelă $AD = 10$ cm, calculează $\cos C$ și apoi determină lungimea diagonalei AC folosind triunghiul dreptunghic format de înălțime.



Fie $AE \perp DC, E \in DC$
 $BF \perp DC, F \in DC$ $\Rightarrow$ $ABFE$ - dreptunghi $\Rightarrow$ $AE = BF$
 $AB = EF$

$ABCD$ - trapez isoscel $\Rightarrow AD = BC$, $m(\angle D) = m(\angle C)$

considerăm $\triangle ADE$ și $\triangle BCF$

$AE = BF$
 $AD = BC$
 $\angle D \equiv \angle C$ $\xrightarrow{\text{L.U.L.}}$ $\triangle ADE \equiv \triangle BCF \Rightarrow DE = FC$

$DE + EF + FC = DC$
 $2DE + EF = DC$
 $EF = AB = 10 \text{ cm}$ $\Rightarrow$ $2DE + 10 = 22 \quad | -10$
 $2DE = 12 \quad | :2$
 $DE = 6 \text{ cm} \Rightarrow FC = 6 \text{ cm}$

În $\triangle BFC$: $m(\angle F) = 90^\circ \Rightarrow \cos C = \frac{FC}{BC}$ $\Rightarrow \cos C = \frac{6}{10} = 0,6$
 $AD = BC$

În $\triangle AEC$: $m(\angle E) = 90^\circ \xRightarrow{\text{Teorema lui Pitagora}} AC^2 = AE^2 + EC^2$

$\triangle BFC$: $m(\angle F) = 90^\circ \xRightarrow{\text{Teorema lui Pitagora}} BC^2 = BF^2 + FC^2$
 $BF^2 = BC^2 - FC^2 = 100 - 36 = 64$
 $BF = 8 \text{ cm} \Rightarrow AE = 8 \text{ cm}$

$$AC^2 = AE^2 + EC^2$$

$$EC = EF + FC = 10 + 6 = 16 \text{ cm}$$

$$AC^2 = 64 + 256 = 320 \Rightarrow AC = \sqrt{320} = 8\sqrt{5} \text{ cm}$$