

Lecția 5 - Linia mijlocie în triunghi

Clasa a 7-a – Capitolul Geometrie

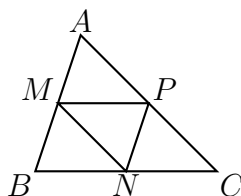
Instrucțiuni

Rezolvă exercițiile folosind proprietățile liniei mijlocii în triunghi (unește mijloacele a două laturi, este paralelă cu a treia și jumătate din ea) și reciprocele acesteia. Durata recomandată: **50 de minute**.

Exerciții

Exercițiul 1. Se consideră triunghiul ABC cu laturile $AB = 12$ cm, $BC = 16$ cm și $AC = 20$ cm. Fie M mijlocul laturii AB , N mijlocul laturii BC și P mijlocul laturii AC .

- Calculează lungimile segmentelor MN , NP și PM .
- Determină perimetrul triunghiului MNP .



- a)
- M - mijlocul lui AB
 N - mijlocul lui BC $\Rightarrow MN$ - linie mijlocie $\Rightarrow$ *Formula liniei mijlocii* $MN \parallel AC$ și $MN = \frac{AC}{2} = \frac{20}{2} = 10$ cm
- N - mijlocul lui BC
 P - mijlocul lui AC $\Rightarrow NP$ - linie mijlocie $\Rightarrow$ *Formula liniei mijlocii* $NP \parallel AB$ și $NP = \frac{AB}{2} = \frac{12}{2} = 6$ cm
- P - mijlocul lui AC
 M - mijlocul lui AB $\Rightarrow MP$ - linie mijlocie $\Rightarrow$ *Formula liniei mijlocii* $MP \parallel BC$ și $MP = \frac{BC}{2} = \frac{16}{2} = 8$ cm

b)

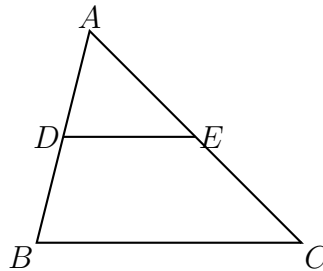
$$P_{\Delta MNP} = MN + NP + PM$$

$$P_{\Delta MNP} = 10 + 6 + 8$$

$$P_{\Delta MNP} = 24 \text{ cm}$$

Exercițiul 2. În triunghiul ABC , punctul D este mijlocul laturii AB . Prin D se duce o paralelă la latura BC , care intersectează latura AC în punctul E .

- (a) Dacă $AC = 18$ cm, calculează lungimea segmentului AE .
 (b) Dacă $BC = 24$ cm, calculează lungimea segmentului DE .

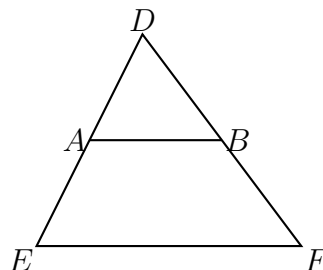


a) Δ - mijlocul lui AB $\left\{ \begin{array}{l} \text{Reciprocă} \\ \text{Teoremei} \\ \text{liniei} \\ \text{mijlocii} \end{array} \right. \Rightarrow E$ - mijlocul lui $AC \Rightarrow AE = \frac{AC}{2} = \frac{18}{2} = 9 \text{ cm}$
 $DE \parallel BC$

b) Δ - mijlocul lui AB $\left\{ \begin{array}{l} \text{Reciprocă} \\ \text{Teoremei} \\ \text{liniei} \\ \text{mijlocii} \end{array} \right. \Rightarrow DE$ - linie mijlocie $\Rightarrow DE = \frac{BC}{2} = \frac{24}{2} = 12 \text{ cm}$
 E - mijlocul lui AC

Exercițiul 3. Se consideră triunghiul DEF . Punctele A și B sunt situate pe laturile DE , respectiv DF , astfel încât $DA = AE$ și $AB \parallel EF$.

- (a) Dacă $AB = 7,5$ cm, calculează lungimea laturii EF .
 (b) Dacă $DF = 22$ cm, calculează lungimea segmentului BF .



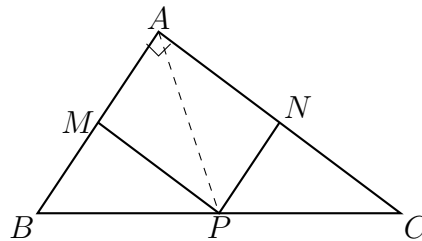
a) $DA = AE$ $\left\{ \begin{array}{l} \text{Reciprocă} \\ \text{Teoremei} \\ \text{liniei} \\ \text{mijlocii} \end{array} \right. \Rightarrow A$ - mijlocul lui DE $\Rightarrow AB$ - linie mijlocie în $\triangle DEF \Rightarrow B$ - mijlocul lui DF
 $AB \parallel EF$
 $AB = \frac{EF}{2} \Rightarrow EF = 2AB = 2 \cdot 7,5 = 15 \text{ cm}$

b) B - mijlocul lui $DF \Rightarrow BF = \frac{DF}{2} = \frac{22}{2} = 11 \text{ cm}$

Exercițiul 4. Se consideră triunghiul dreptunghic ABC ($\angle A = 90^\circ$). Punctele M și N sunt mijloacele catetelor AB , respectiv AC , iar P este mijlocul ipotenuzei BC .

(a) Arată că patrulaterul $AMPN$ este dreptunghi.

(b) Dacă $AB = 6$ cm și $AC = 8$ cm și $BC = 10$ cm, calculează perimetrul triunghiului MNP .



a) P - mijlocul lui $BC \Rightarrow PN$ - linie mijlocie $\Rightarrow PN \parallel AB$
 N - mijlocul lui AC

$AB \perp AC \Rightarrow PN \perp AC \Rightarrow m(\angle PNA) = 90^\circ$
 $PN \parallel AB$

P - mijlocul lui $BC \Rightarrow PM$ - linie mijlocie $\Rightarrow PM \parallel AC$
 M - mijlocul lui AB

$AC \perp AB \Rightarrow PM \perp AB \Rightarrow m(\angle PMA) = 90^\circ$
 $PM \parallel AC$

$AMPN$ - patrulater
 $m(\angle A) = 90^\circ, m(\angle PNA) = 90^\circ, m(\angle PMA) = 90^\circ \Rightarrow AMPN$ - dreptunghi

b) M - mijlocul lui $AB \Rightarrow MN$ - linie mijlocie
 N - mijlocul lui AC

$$MN = \frac{BC}{2} = \frac{10}{2} = 5 \text{ cm}$$

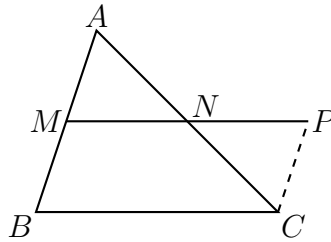
$$PN \text{ - linie mijlocie } \Rightarrow PN = \frac{AC}{2} = \frac{8}{2} = 4 \text{ cm}$$

$$PM \text{ - linie mijlocie } \Rightarrow PM = \frac{AB}{2} = \frac{6}{2} = 3 \text{ cm}$$

$$P_{\Delta MNP} = MN + NP + PM = 5 + 4 + 3 = 12 \text{ cm}$$

Exercițiul 5. În triunghiul ABC , M este mijlocul laturii AB și N este mijlocul laturii AC . Fie P simetricul punctului M față de punctul N .

- (a) Demonstrează că $CP \parallel AB$.
 (b) Arată că lungimea segmentului CP este egală cu jumătate din lungimea laturii AB .



a) P -simetricul lui M față de $N \Rightarrow N$ -mijlocul lui MP

N -mijlocul lui AC și $MP \Rightarrow$ patrulaterul $AMCP$ are diagonalele care se înjumătățesc în $N \Rightarrow AMCP$ -paralelogram $\Rightarrow CP \parallel AM$

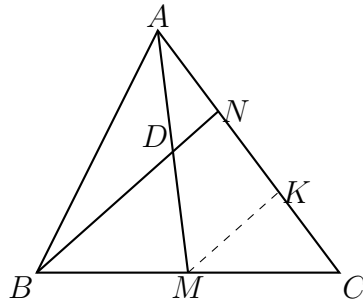
Deoarece $M \in AB$
 $CP \parallel AM \quad \Bigg\} \Rightarrow CP \parallel AB$

b)

Într-un paralelogram, laturile opuse sunt congruente $\Rightarrow CP = AM$

M -mijlocul lui $AB \Rightarrow AM = \frac{AB}{2} \quad \Bigg\} \Rightarrow CP = \frac{AB}{2}$
 $CP = AM$

Exercițiul 6. În triunghiul ABC , AM este mediană ($M \in BC$). Fie D mijlocul segmentului AM . Dreapta BD intersectează latura AC în punctul N . Demonstrează că $AC = 3 \cdot AN$.



Ducem prin punctul M o paralelă la dreapta BN care intersectează latura AC în punctul K .

Deci, $MK \parallel BN$ $\wedge$ $D \in BN$ $\Rightarrow MK \parallel DN$

În $\triangle BNC$:
 M - mijlocul lui BC
 $MK \parallel DN$ $\xRightarrow[\text{Teorema liniei mijlocii}]{\text{Reciproca}}$ K - mijlocul lui $NC \Rightarrow NK = KC$ (1)

În $\triangle AMK$:
 D - mijlocul lui AM
 $DN \parallel MK$ $\xRightarrow[\text{Teorema liniei mijlocii}]{\text{Reciproca}}$ N - mijlocul lui $AK \Rightarrow AN = NK$ (2)

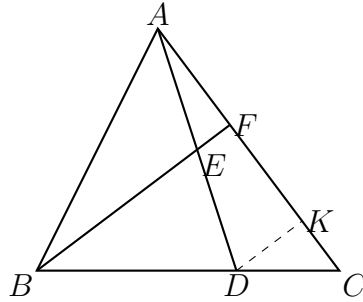
$NK = KC$ (1) $\wedge$ $AN = NK$ (2) $\Rightarrow KC = AN = NK$

$$AC = AN + NK + KC$$

$$AC = AN + AN + AN$$

$$AC = 3AN$$

Exercițiul 7. Fie triunghiul ABC . Punctul D se află pe latura BC astfel încât $BD = 2 \cdot DC$. Fie E mijlocul segmentului AD . Dreapta BE intersectează latura AC în punctul F . Calculează valoarea raportului $\frac{AF}{FC}$.



Ducem prin punctul D o paralelă la dreapta BF care intersectează latura AC în punctul K .

Deci, $\left. \begin{array}{l} DK \parallel BF \\ E \in BF \end{array} \right\} \Rightarrow DK \parallel EF$

$\triangle CBF$: $\left. \begin{array}{l} DK \parallel BF \end{array} \right\} \xRightarrow[\text{Teorema lui Thales}]{\text{Teorema}} \frac{CK}{KF} = \frac{CD}{DB}$

$\left. \begin{array}{l} BD = 2CD \\ \frac{CK}{KF} = \frac{CD}{DB} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{CK}{KF} = \frac{CD}{2CD} \Rightarrow \frac{CK}{KF} = \frac{1}{2} \Rightarrow KF = 2CK$

$\triangle ADK$: $\left. \begin{array}{l} E - \text{mijlocul lui } AD \\ EF \parallel DK \end{array} \right\} \xRightarrow[\text{Teorema liniei mijlocii}]{\text{Reciproca}} F - \text{mijlocul lui } AK \Rightarrow AF = FK$

$$AF = FK = 2CK$$

$$FK = 2CK$$

$$FC = FK + KC$$

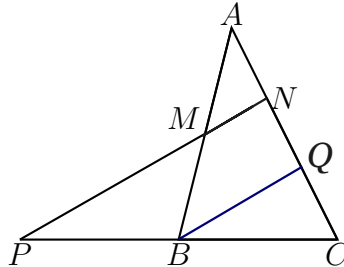
$$FC = 2CK + KC$$

$$FC = 3CK$$

$$\frac{AF}{FC} = \frac{2CK}{3CK}$$

$$\frac{AF}{FC} = \frac{2}{3}$$

Exercițiul 8. Se consideră triunghiul ABC . M este mijlocul laturii AB , iar N este un punct pe latura AC astfel încât $AN = \frac{1}{3}AC$. Dreapta MN intersectează dreapta BC în punctul P . Arată că B este mijlocul segmentului CP .



Ducem prin B o paralelă la dreapta MN care intersectează AC în Q

Deci, $BQ \parallel MN$

În $\triangle ABQ$:

M - mijlocul laturii AB
 $MN \parallel BQ$

$\Rightarrow$ Reciproca
 Teoremei
 lui
 mijlocii

N - mijlocul lui $AQ \Rightarrow$
 $\Rightarrow AN = NQ$

$$AN = \frac{1}{3} AC \Rightarrow AC = 3AN$$

$$AN = x \Rightarrow AC = 3x$$

$$AN = NQ = x$$

$$AC = AN + NQ + QC$$

$$QC = AC - AN - NQ$$

$$QC = 3x - x - x$$

$$QC = x$$

Deci $AN = NQ = QC$

În $\triangle PCN$:

$BQ \parallel PN$

$\Rightarrow$ Teorema
 lui
 Thales

$$\frac{CB}{BP} = \frac{CQ}{QN}$$

$$CQ = QN$$

$$\Rightarrow \frac{CB}{BP} = \frac{QN}{QN} = 1$$

7

$$\frac{CB}{BP} = 1 \Rightarrow CB = BP \Rightarrow B - \text{mijlocul lui } CP$$