

Lecția 4 - Teorema lui Pitagora

Clasa a 7-a – Capitolul Geometrie

Instrucțiuni

Rezolvă exercițiile folosind Teorema lui Pitagora: în orice triunghi dreptunghic, suma pătratelor lungimilor catetelor este egală cu pătratul lungimii ipotenuzei ($c_1^2 + c_2^2 = ip^2$). Durata recomandată: **50 de minute**.

Exerciții

Exercițiul 1. Determină lungimea laturii necunoscute în următoarele triunghiuri dreptunghice:

- (a) Triunghiul ABC ($\angle A = 90^\circ$) cu catetele $AB = 6$ cm și $AC = 8$ cm. Aflați BC .
- (b) Triunghiul DEF ($\angle D = 90^\circ$) cu ipotenuza $EF = 13$ cm și cateta $DE = 5$ cm. Aflați DF .

a) În $\triangle ABC$: $m(\angle A) = 90^\circ \xRightarrow[\text{Teorema lui Pitagora}]{} BC^2 = AB^2 + AC^2 \Rightarrow BC^2 = 36 + 64 = 100$
 $BC = \sqrt{100} = 10$ cm

b) În $\triangle DEF$: $m(\angle D) = 90^\circ \xRightarrow[\text{Teorema lui Pitagora}]{} EF^2 = DE^2 + DF^2$
 $DF^2 = EF^2 - DE^2 = 13^2 - 5^2 = 169 - 25 = 144$
 $DF = \sqrt{144} = 12$ cm

Exercițiul 2. Verificați, folosind Reciproca Teoremei lui Pitagora, dacă triunghiul cu laturile de lungimi 9 cm, 12 cm și 15 cm este dreptunghic. Dacă da, precizați care este unghiul drept și calculați aria triunghiului.

$$9^2 + 12^2 = 15^2$$

$$81 + 144 = 225$$

$$225 = 225 \quad \text{Adevărat}$$

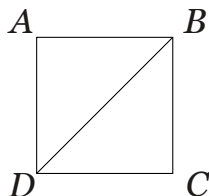
Conform Reciprocei Teoremei lui Pitagora, triunghiul este dreptunghic
 catetele sunt cele cu lungimea de 9 și 12 cm.

$$A_{\triangle \text{dreptunghic}} = \frac{c_1 \cdot c_2}{2}$$

$$A_{\triangle} = \frac{9 \cdot 12}{2} = 9 \cdot 6 = 54 \text{ cm}^2$$

Exercițiul 3. Un pătrat are latura de 8 cm.

- (a) Calculează lungimea diagonalei pătratului.
 (b) Dacă diagonala unui alt pătrat este de $10\sqrt{2}$ cm, aflați perimetrul acestuia.

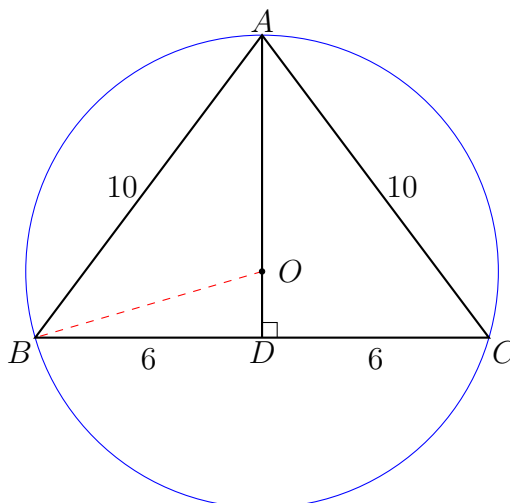


a) $ABCD$ - pătrat $\Rightarrow m(\angle A) = 90^\circ$
 În $\triangle BAD$: $m(\angle A) = 90^\circ \xrightarrow[\text{Teorema lui Pitagora}]{} BD^2 = AD^2 + AB^2$
 $AD = AB \Rightarrow BD = AB\sqrt{2} = 8\sqrt{2}$ cm

b) $d = l\sqrt{2} \Rightarrow l = \frac{d}{\sqrt{2}}$
 $l = \frac{10\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 10$ cm

Exercițiul 4. Se consideră triunghiul isoscel ABC cu $AB = AC = 10$ cm și $BC = 12$ cm.

- (a) Calculează lungimea înălțimii AD ($D \in BC$).
 (b) Determină raza cercului circumscris triunghiului ABC .

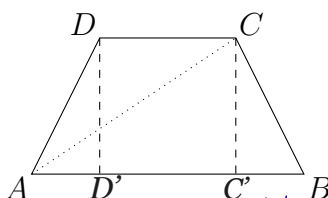


a) $\triangle ABC$ - isoscel } $\Rightarrow AD$ - mediană $\Rightarrow BD = DC = \frac{BC}{2} = \frac{12}{2} = 6$ cm
 AD - înălțime }
 În $\triangle BAD$: $m(\angle D) = 90^\circ \xrightarrow[\text{Teorema lui Pitagora}]{} AB^2 = BD^2 + AD^2$
 $AD^2 = AB^2 - BD^2 = 100 - 36 = 64$
 $\sqrt{AD^2} = \sqrt{64} \Rightarrow AD = 8$ cm

b) O - centrul cercului $\Rightarrow OA = OB = R$
 $OD = AD - OA = 8 - R$
 În $\triangle OBD$: $m(\angle D) = 90^\circ \xrightarrow[\text{Teorema lui Pitagora}]{} OB^2 = BD^2 + OD^2 \Rightarrow R^2 = 36 + (8 - R)^2$
 $R^2 = 36 + 64 - 16R + R^2$
 $-16R = 100 - 16$
 $R = \frac{100}{16} = \frac{25}{4} = 6,25$ cm

Exercițiul 5. Fie trapezul isoscel $ABCD$ cu $AB \parallel CD$. Se cunosc bazele $AB = 20$ cm, $CD = 8$ cm și latura ne paralelă $AD = 10$ cm.

- Calculează înălțimea trapezului.
- Determină lungimea diagonalei AC .



a) Fie $DD' \perp AB, D' \in AB$ și $CC' \perp AB, C' \in AB$ $\Rightarrow \Delta CC'D' - \text{dreptunghi} \Rightarrow DC = D'C' = 8 \text{ cm}$
 $DD' = CC'$

Considerăm $\Delta ADD'$ și $\Delta BCC'$

$AD = BC$ (trapez isoscel)

$\angle DAD' = \angle CBC'$ (trapez isoscel)

$DD' = CC'$

$\xrightarrow{\text{L.U.L.}} \Delta ADD' \equiv \Delta BCC' \Rightarrow AD' = BC'$

$AD' + D'C' + C'B = AB$

$2AD' + 8 = 20 \Rightarrow AD' = \frac{12}{2} = 6 \text{ cm}$

$\Delta ADD'$: $m(\angle D') = 90^\circ \xrightarrow{\text{Teorema lui Pitagora}}$

$AD^2 = AD'^2 + DD'^2 \Rightarrow DD'^2 = AD^2 - AD'^2 = 100 - 36 = 64 \Rightarrow DD' = 8 \text{ cm}$

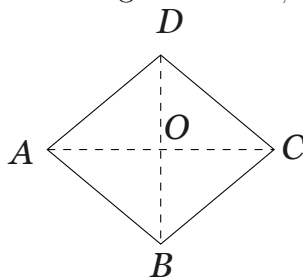
b) $\Delta AC'C$: $AC' = AD' + D'C' = 6 + 8 = 14 \text{ cm}$, $CC' = DD' = 8 \text{ cm}$

$m(\angle C') = 90^\circ \xrightarrow{\text{Teorema lui Pitagora}}$

$AC^2 = AC'^2 + CC'^2 = 196 + 64 = 260 \Rightarrow AC = \sqrt{260}$
 $AC = 2\sqrt{65} \text{ cm}$

Exercițiul 6. Un romb $ABCD$ are perimetrul egal cu 52 cm și o diagonală $AC = 24$ cm.

- Aflați lungimea laturii rombului.
- Calculați lungimea celeilalte diagonale BD și aria rombului.



a) $P = 4l \Rightarrow l = \frac{P}{4}$

$l = \frac{52}{4} = 13 \text{ cm}$

b) $ABCD - \text{romb} \Rightarrow \text{diagonalele se înjumătățesc}$

$AC \cap BD = \{O\} \Rightarrow AO = \frac{AC}{2} \Rightarrow AO = \frac{24}{2} = 12 \text{ cm}$

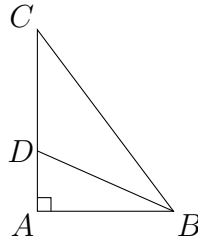
$\text{În } \Delta AOB$: $m(\angle O) = 90^\circ \xrightarrow{\text{Teorema lui Pitagora}}$ $AB^2 = AO^2 + OB^2 \Rightarrow OB^2 = AB^2 - AO^2 = 169 - 144$
 $OB^2 = 25 \Rightarrow OB = 5 \text{ cm}$

$BD = 2OB = 2 \cdot 5 = 10 \text{ cm}$

$ABCD - \text{romb} \Rightarrow A_{ABCD} = \frac{24 \cdot 10}{2} = \frac{240}{2} = 120 \text{ cm}^2$

Exercițiul 7. Fie triunghiul dreptunghic ABC cu $\angle A = 90^\circ$ și $AC = 30$ cm. Bisectoarea unghiului B intersectează cateta AC în punctul D astfel încât $AD = 10$ cm.

- Calculează lungimea segmentului DC .
- Determină lungimea catetei AB folosind Teorema Bisectoarei și apoi Teorema lui Pitagora.



a)

$$AC = AD + DC \Rightarrow DC = AC - AD$$

$$AD = 10 \text{ cm}$$

$$AC = 30 \text{ cm}$$

$$DC = 30 - 10 = 20 \text{ cm}$$

b)

În $\triangle ABC$:

(BD - bisectoarea $\angle B$) $\xRightarrow{\text{Teorema bisectoarei}} \frac{AB}{BC} = \frac{AD}{DC}$

$$\frac{AB}{DC} = \frac{10}{20} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{AB}{BC} = \frac{1}{2} \Rightarrow BC = 2AB$$

În $\triangle ABC$:

$m(\angle A) = 90^\circ \xRightarrow{\text{Teorema lui Pitagora}} BC^2 = AB^2 + AC^2$

$$4AB^2 = AB^2 + 30^2 \quad | -AB^2$$

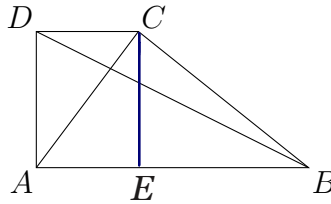
$$3AB^2 = 900 \quad | :3$$

$$\sqrt{AB^2} = \sqrt{300}$$

$$AB = 10\sqrt{3} \text{ cm}$$

Exercițiul 8. În trapezul dreptunghic $ABCD$ ($AB \parallel CD$, $\angle A = 90^\circ$), diagonalele sunt perpendiculare ($AC \perp BD$). Se știe că $AD = 12$ cm și $CD = 9$ cm.

- (a) Calculează lungimea diagonalei mici BD .
 (b) Află lungimea bazei mari AB folosind teorema catetei în triunghiul format de diagonale (sau asemănare) și apoi perimetrul trapezului.



a) În $\triangle ADB$:
 $m(\angle A) = 90^\circ$

Notăm $m(\angle ABD) = \angle$

$m(\angle ABD) + m(\angle DAB) + m(\angle ADB) = 180^\circ \Rightarrow m(\angle ADB) = 90^\circ - \angle$

$AC \perp BD$, $\{O\} = AC \cap BD$

În $\triangle AOB$:

$m(\angle OAB) + m(\angle ABO) + m(\angle AOB) = 180^\circ$

$m(\angle OAB) = 90^\circ - m(\angle ABO) \Rightarrow m(\angle OAB) = 90^\circ - \angle$

$m(\angle ABO) = m(\angle ABD) = \angle$

$m(\angle DAB) = m(\angle DAC) + m(\angle CAB) \Rightarrow 90^\circ = m(\angle DAC) + 90^\circ - \angle$
 $m(\angle CAB) = m(\angle OAB) = 90^\circ - \angle \Rightarrow m(\angle DAC) = \angle$

comparăm $\triangle ABD$ și $\triangle DAC$

$\angle DAB \equiv \angle ADC$

$\angle ABD \equiv \angle CAD = \angle$

$\Rightarrow \triangle ABD \equiv \triangle DAC$

$\Rightarrow \frac{AB}{AD} = \frac{BD}{AC} = \frac{AD}{DC}$

$\frac{AD}{CD} = \frac{AB}{AD} \Rightarrow AD^2 = AB \cdot CD \Rightarrow AB = \frac{AD^2}{CD} = \frac{144}{9} = 16$ cm

În $\triangle ABD$: $m(\angle A) = 90^\circ \xRightarrow[\text{Teorema lui Pitagora}]{} BD^2 = AD^2 + AB^2 = 144 + 256 = 400 \Rightarrow BD = 20$ cm

b.)

Fie $CE \perp AB$, $E \in AB$

$$\left. \begin{array}{l} CE \perp AB \Rightarrow m(\angle CEA) = 90^\circ \\ m(\angle ADC) = 90^\circ \\ m(\angle DAE) = 90^\circ \end{array} \right\} \Rightarrow \Delta CEA - \text{dreptunghi} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} DA = CE = 12 \text{ cm} \\ AE = CD = 9 \text{ cm} \end{array} \right\}$$

$$EB = AB - AE$$

$$EB = 16 - 9 = 7 \text{ cm}$$

$$\text{În } \Delta CEB: m(\angle E) = 90^\circ \xRightarrow[\text{Teorema lui Pitagora}]{} BC^2 = CE^2 + EB^2$$

$$BC^2 = CE^2 + EB^2$$

$$BC^2 = 144 + 49$$

$$\sqrt{BC^2} = \sqrt{193}$$

$$BC = \sqrt{193} \text{ cm}$$

$$P = AB + BC + CD + DA$$

$$P = 16 + \sqrt{193} + 9 + 12$$

$$P = (37 + \sqrt{193}) \text{ cm}$$