

Lecția 4 – Piramida regulată

Clasa a 8-a – Capitolul 2 – Aree și volume ale unor corpuri geometrice

Instrucțiuni

Rezolvă exercițiile folosind formulele piramidei regulate (aria laterală, aria totală, volumul) și elementele specifice (apotemă, înălțime, muchie). Durata recomandată: **50 minute**.

Exerciții

Exercițiul 1. O piramidă patrulateră regulată $VABCD$ are latura bazei $l = 10$ cm și apotema piramidei $a_p = 13$ cm. Calculați:

- (a) Aria laterală a piramidei.
- (b) Înălțimea piramidei.

Exercițiul 2. O piramidă triunghiulară regulată are latura bazei $l = 6$ cm și înălțimea $h = 4$ cm. Calculați volumul piramidei.

Exercițiul 3. O piramidă hexagonală regulată are aria bazei egală cu $54\sqrt{3}$ cm² și înălțimea de 10 cm. Calculați volumul piramidei.

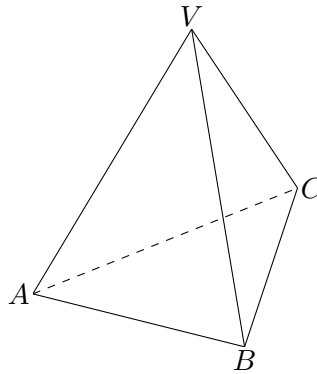
Exercițiul 4. Fie piramida patrulateră regulată $VABCD$ cu înălțimea $VO = 8$ cm și muchia laterală $VA = 10$ cm.

- (a) Calculați lungimea diagonalei bazei și latura bazei.
- (b) Calculați aria totală a piramidei.

Exercițiul 5. O piramidă triunghiulară regulată are apotema piramidei egală cu 10 cm, iar apotema bazei egală cu 6 cm. Calculați:

- (a) Înălțimea piramidei.
- (b) Aria laterală a piramidei.

Exercițiul 6. Se consideră tetraedrul regulat $VABC$ cu muchia $a = 6$ cm. Calculați înălțimea tetraedrului și cosinusul unghiului format de o față laterală cu planul bazei.



Exercițiul 7. Fie piramida patrulateră regulată $VABCD$ cu latura bazei $AB = 12$ cm. Unghiul dintre muchia laterală VC și planul bazei $(ABCD)$ este de 45° .

- (a) Calculați volumul piramidei.
- (b) Calculați distanța de la centrul bazei O la fața laterală (VBC) .

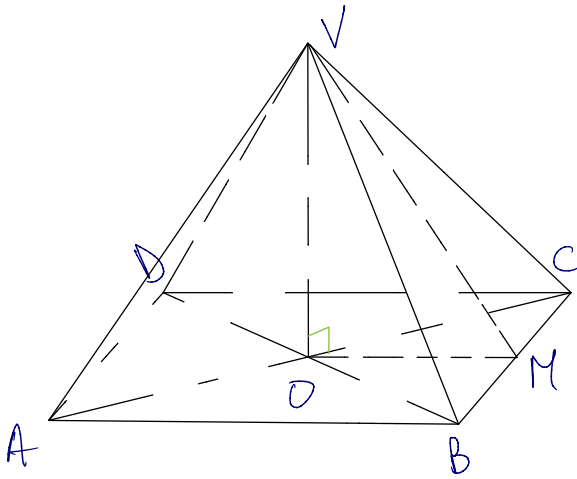
Exercițiul 8. O piramidă hexagonală regulată $VABCDEF$ are latura bazei de 6 cm și înălțimea de $6\sqrt{3}$ cm.

- (a) Calculați aria laterală a piramidei.
- (b) Determinați sinusul unghiului dintre muchia laterală VA și muchia bazei AB .

Succes!

Exercițiul 1. O piramidă patrulateră regulată $VABCD$ are latura bazei $l = 10$ cm și apotema piramidei $a_p = 13$ cm. Calculați:

- (a) Aria laterală a piramidei.
(b) Înălțimea piramidei.



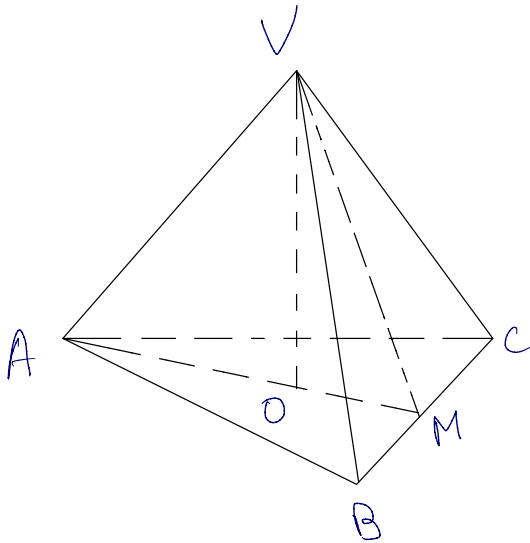
$$a) A_l = \frac{P_b \cdot a_p}{2} \quad \left. \begin{array}{l} P_b = 4 \cdot l \\ \Rightarrow A_l = \frac{4 \cdot l \cdot a_p}{2} = 2 \cdot l \cdot a_p \end{array} \right\} \Rightarrow A_l = \frac{4 \cdot 10 \cdot 13}{2} = 260 \text{ cm}^2$$

$$b) a_p^2 = a_b^2 + R^2$$

$ABCD$ pătrat $\Rightarrow a_b = \frac{l}{2} = \frac{10}{2} = 5 \text{ cm}$

$$\Rightarrow R^2 = a_p^2 - a_b^2 = 13^2 - 5^2 = 169 - 25 = 144 \Rightarrow R = \sqrt{144} = 12 \text{ cm}$$

Exercițiul 2. O piramidă triunghiulară regulată are latura bazei $l = 6$ cm și înălțimea $h = 4$ cm. Calculați volumul piramidei.



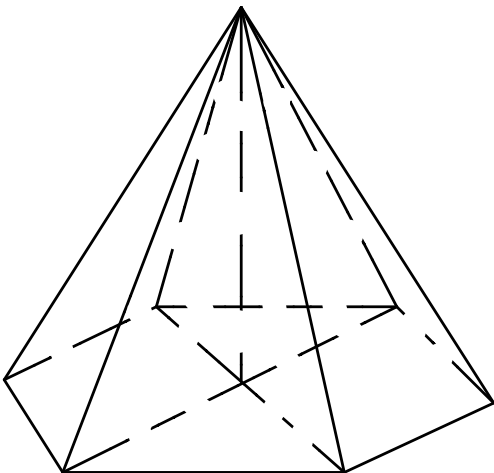
$$V = \frac{A_b \cdot h}{3}$$

$$\triangle ABC \text{ echilateral} \Rightarrow A_b = \frac{l^2 \sqrt{3}}{4}$$

$$\Rightarrow A_b = \frac{6^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{36 \sqrt{3}}{4} = 9 \sqrt{3} \text{ cm}^2$$

$$\Rightarrow V = \frac{9 \sqrt{3} \cdot 4}{3} = 12 \sqrt{3} \text{ cm}^3$$

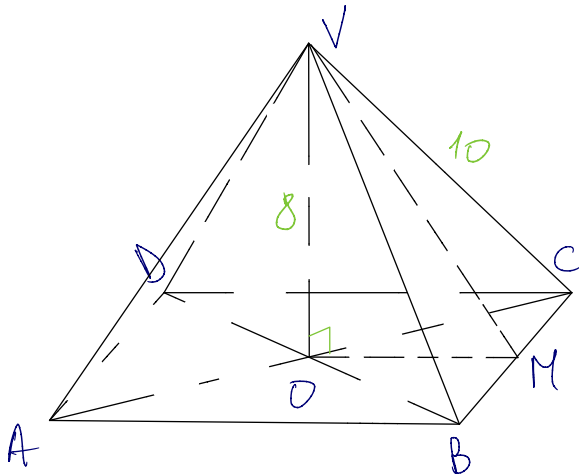
Exercițiul 3. O piramidă hexagonală regulată are aria bazei egală cu $54\sqrt{3} \text{ cm}^2$ și înălțimea de 10 cm. Calculați volumul piramidei.



$$V = \frac{A_b \cdot h}{3} = \frac{54 \sqrt{3} \cdot 10}{3} = 180 \sqrt{3} \text{ cm}^3$$

Exercițiul 4. Fie piramida patrulateră regulată $VABCD$ cu înălțimea $VO = 8$ cm și muchia laterală $VA = 10$ cm.

- Calculați lungimea diagonalei bazei și latura bazei.
- Calculați aria totală a piramidei.



a) $\left. \begin{array}{l} VOL(ABCD) \\ OC \leftarrow (ABCD) \end{array} \right\} \Rightarrow NOLOC$

Im Δ VOC dreptunghiic aplic T.P.:

$$\Rightarrow OC^2 = VC^2 - VO^2 \Rightarrow OC^2 = 10^2 - 8^2$$

$$OC^2 = 100 - 64 = 36 \Rightarrow OC = \sqrt{36} = 6 \text{ cm}$$

$$AC = 2 \cdot OC = 12 \text{ cm}$$

$$ABCD \text{ pătrat} \Rightarrow AC = l\sqrt{2} \Rightarrow l = \frac{AC}{\sqrt{2}} = \frac{12}{\sqrt{2}} = \frac{12\sqrt{2}}{2} = 6\sqrt{2} \text{ cm}$$

b) $A_t = A_v + A_e$

$$A_{\text{g}} = l^2 = (6\sqrt{2})^2 = 72 \text{ cm}^2$$

$$A_e = \frac{P_e \cdot a_p}{2} ; P_e = 4 \cdot l = 4 \cdot 6\sqrt{2} = 24\sqrt{2} \text{ cm}$$

$$a_p^2 = a_b^2 + h^2 \quad \Rightarrow \quad a_p = \sqrt{(3\sqrt{2})^2 + 8^2} = \sqrt{18 + 64} = \sqrt{82} \text{ cm}$$

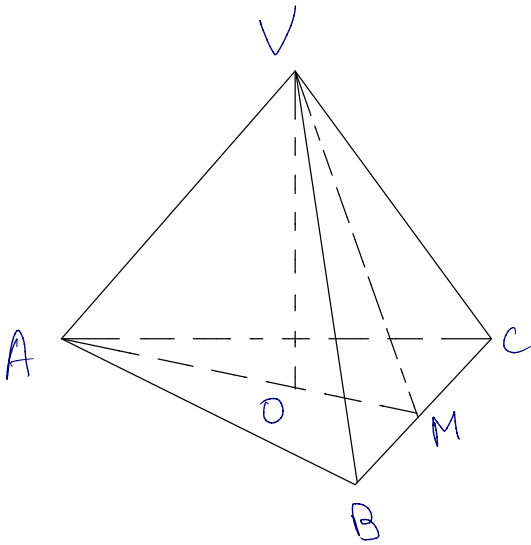
$$O_b = \frac{l}{2} = \frac{6\sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{2} \text{ cm}$$

$$\Rightarrow A_e = \frac{24 \sqrt{2} \cdot \sqrt{82}}{2} = 12 \sqrt{164} = 24 \sqrt{41} \text{ cm}^2$$

$$\Rightarrow A_t = 72 + 24\sqrt{41} = 24(3 + \sqrt{41}) \text{ cm}^2$$

Exercițiul 5. O piramidă triunghiulară regulată are apotema piramidei egală cu 10 cm, iar apotema bazei egală cu 6 cm. Calculați:

- (a) Înălțimea piramidei.
(b) Aria laterală a piramidei.



$$a_p^2 = a_b^2 + h^2 \Rightarrow h = \sqrt{a_p^2 - a_b^2}$$

$$h = \sqrt{10^2 - 6^2} = \sqrt{100 - 36} = \sqrt{64} = 8 \text{ cm}$$

$$b) A_l = \frac{P_b \cdot a_p}{2}$$

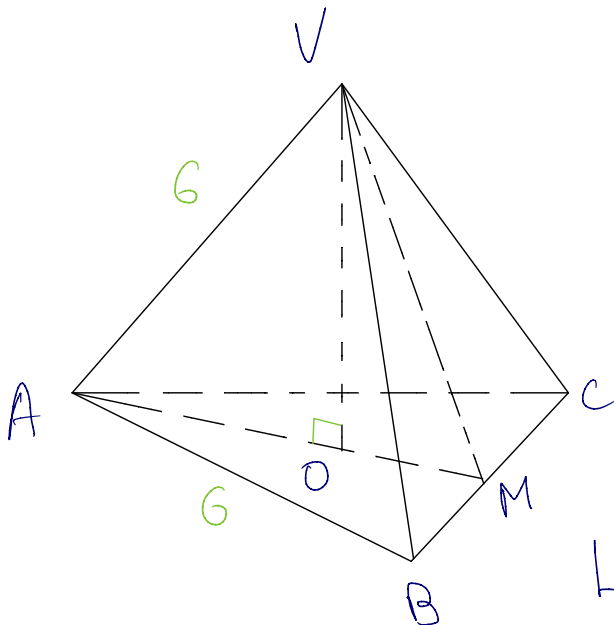
$$\left. \begin{array}{l} a_b = \frac{l\sqrt{3}}{6} \\ a_b = 6 \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{l\sqrt{3}}{6} = 6 / :6 \Rightarrow l\sqrt{3} = 36 / \sqrt{3}$$

$$l = \frac{36}{\sqrt{3}} = \frac{36\sqrt{3}}{3} = 12\sqrt{3} \text{ cm}$$

$$\Rightarrow P_b = 3 \cdot l = 3 \cdot 12\sqrt{3} = 36\sqrt{3} \text{ cm}$$

$$\Rightarrow A_l = \frac{36\sqrt{3} \cdot 10}{2} = 180\sqrt{3} \text{ cm}^2$$

Exercițiul 6. Se consideră tetraedrul regulat $VABC$ cu muchia $a = 6$ cm. Calculați înălțimea tetraedrului și cosinusul unghiului format de o față laterală cu planul bazei.



$$OM = a_b = \frac{l\sqrt{3}}{6} = \frac{6\sqrt{3}}{6} = \sqrt{3} \text{ cm}$$

$$\triangle VBC \text{ echilateral} \Rightarrow VM = \frac{l\sqrt{3}}{2} = \frac{6\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3} \text{ cm}$$

În $\triangle VOM$ dreptunghic aplicăm T.P.:

$$VO^2 = VM^2 - OM^2 = (3\sqrt{3})^2 - (\sqrt{3})^2 = 27 - 3 = 24 \Rightarrow VO = \sqrt{24} = 2\sqrt{6} \text{ cm}$$

Luăm fețele (VBC) și (ABC) .

$$\left. \begin{array}{l} P \cap (ABC) \cap VM = OM \\ VM \subset (VBC) \\ VM \perp BC \\ OM \perp BC \\ OM \subset (ABC) \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\angle (VBC), (ABC) = \angle (VM, OM) = \angle VMO$$

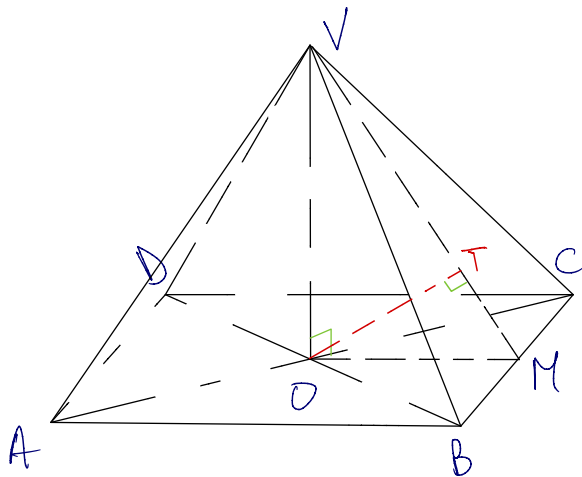
$$\text{În } \triangle VOM \text{ dreptunghic: } \cos \hat{VMO} = \frac{OM}{VM} = \frac{\sqrt{3}}{3\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow \cos \hat{VMO} = \frac{1}{3}$$

Exercițiul 7. Fie piramida patrulateră regulată $VABCD$ cu latura bazei $AB = 12$ cm. Unghiul dintre muchia laterală VC și planul bazei $(ABCD)$ este de 45° .

(a) Calculați volumul piramidei.

(b) Calculați distanța de la centrul bazei O la fața laterală (VBC) .



$$\begin{aligned} a) \quad & \left. \begin{aligned} P_{(ABCD)}^V &= O \\ P_{(ABCD)}^C &= C \end{aligned} \right\} \Rightarrow P_{(ABCD)} VC = OC \\ & \Rightarrow \angle(VC, (ABCD)) = \angle(VC, OC) = \angle VCO \\ & \Rightarrow \angle VCO = 45^\circ \\ & \text{dar } \triangle VOC \text{ dreptunghic } \left. \begin{aligned} & \Rightarrow \triangle VOC \text{ dreptunghic} \\ & \text{isoscel} \end{aligned} \right\} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow VO = OC = \frac{AC}{2} = \frac{l\sqrt{2}}{2} = \frac{12\sqrt{2}}{2} = 6\sqrt{2} \text{ cm} \Rightarrow h = 6\sqrt{2} \text{ cm}$$

$$V = \frac{A_b \cdot h}{3}$$

$$A_b = l^2 = 12^2 = 144 \text{ cm}^2 \Rightarrow V = \frac{144 \cdot 6\sqrt{2}}{3} = 288\sqrt{2} \text{ cm}^3$$

$$b) \quad d(O, (VBC)) = ?$$

Fie $OT \perp VM$, $T \in VM$.

$$BC \perp VM$$

$$BC \perp OM$$

$$VM \cap OM = \{M\}$$

$$VM, OM \subset (VOM)$$

$$\left. \begin{aligned} & BC \perp VM \\ & BC \perp OM \\ & VM \cap OM = \{M\} \\ & VM, OM \subset (VOM) \end{aligned} \right\} \Rightarrow BC \perp (VOM) \left. \begin{aligned} & \Rightarrow BC \perp OT \\ & OT \subset (VOM) \end{aligned} \right\} \Rightarrow BC \perp OT$$

$$\left. \begin{aligned} & OT \perp VM \\ & BC \cap VM = \{M\} \\ & BC, VM \subset (VBC) \end{aligned} \right\} \Rightarrow OT \perp (VBC)$$

$$\Rightarrow d(O, (VBC)) = OT$$

$$\text{În } \triangle VOM \text{ dreptunghic: } OT = \frac{VO \cdot OM}{VM}$$

$$OM = \frac{l}{2} = \frac{AB}{2} = \frac{12}{2} = 6 \text{ cm}$$

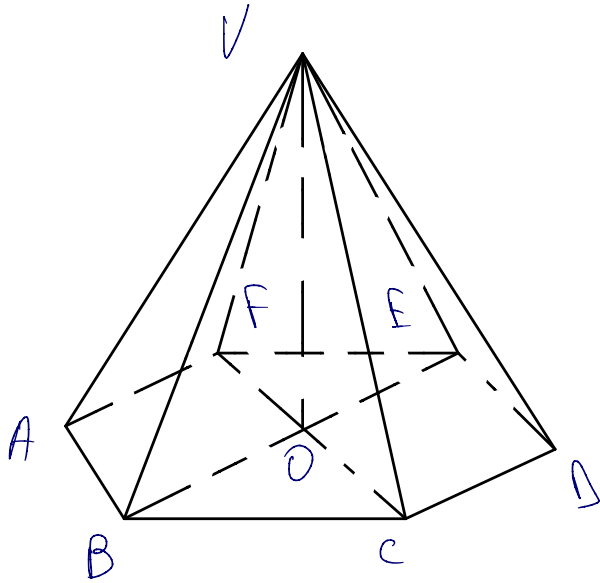
$$\text{În } \triangle VOM \text{ aplic T.P.: } VM^2 = VO^2 + OM^2 = (6\sqrt{2})^2 + 6^2 = 72 + 36 = 108$$

$$\Rightarrow VM = \sqrt{108} = 6\sqrt{3} \text{ cm} \Rightarrow OT = \frac{6\sqrt{2} \cdot 6}{6\sqrt{3}} = \frac{6\sqrt{6}}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{6} \text{ cm}$$

Exercițiul 8. O piramidă hexagonală regulată $VABCDEF$ are latura bazei de 6 cm și înălțimea de $6\sqrt{3}$ cm.

(a) Calculați aria laterală a piramidei.

(b) Determinați sinusul unghiului dintre muchia laterală VA și muchia bazei AB .



$$a) a_p^2 = a_b^2 + h^2$$

$$a_b = \frac{l\sqrt{3}}{2} = \frac{6\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3} \text{ cm}$$

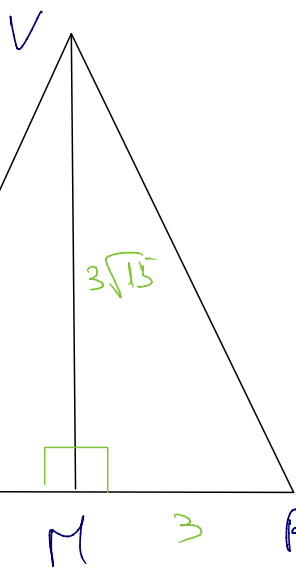
$$\Rightarrow a_p^2 = (3\sqrt{3})^2 + (6\sqrt{3})^2 = 27 + 108 = 135$$

$$\Rightarrow a_p = \sqrt{135} = 3\sqrt{15}$$

$$A_l = \frac{P_b \cdot a_p}{2} = \frac{6 \cdot 6 \cdot 3\sqrt{15}}{2} = 3 \cdot 6 \cdot 3\sqrt{15}$$

$$\Rightarrow A_l = 54\sqrt{15} \text{ cm}$$

$$b) \angle(VA, AB) = \angle VAB$$



$$\text{Fie } VM \perp AB, M \in AB$$

$$VA = VB \Rightarrow \triangle VAB \text{ isoscel} \Rightarrow VM \text{ mediană} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow AM = MB = \frac{AB}{2} = \frac{6}{2} = 3 \text{ cm}$$

$$VM = a_p = 3\sqrt{15} \text{ cm}$$

$$\sin \hat{VAB} = \sin \hat{VAM}$$

În $\triangle VMA$ dreptunghic aplic T.P.:

$$\Rightarrow VA^2 = VM^2 + AM^2 = (3\sqrt{15})^2 + 3^2 = 135 + 9 = 144 \Rightarrow VA = \sqrt{144} = 12 \text{ cm}$$

$$\text{În } \triangle VAM: \sin \hat{VAM} = \frac{VM}{VA} = \frac{3\sqrt{15}}{12} = \frac{\sqrt{15}}{4} \text{ cm}$$