

Lecția 4 - Teorema bisectoarei

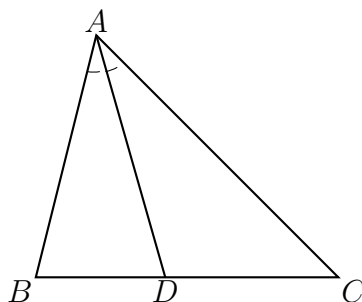
Clasa a 7-a – Capitolul Geometrie

Instrucțiuni

Rezolvă exercițiile folosind Teorema bisectoarei: într-un triunghi, bisectoarea unui unghi determină pe latura opusă segmente proporționale cu laturile care formează unghiul. Durata recomandată: **45 de minute**.

Exerciții

Exercițiul 1. În triunghiul ABC , AD este bisectoarea unghiului $\angle BAC$ ($D \in BC$). Se cunosc lungimile: $AB = 12$ cm, $AC = 16$ cm și $BD = 9$ cm. Calculează lungimea segmentului DC .



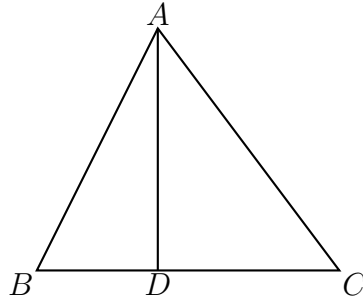
$$\begin{array}{l} \text{În } \triangle ABC: \\ AD - \text{bisectoarea} \end{array} \left. \begin{array}{l} \text{Teorema} \\ \text{bisectoarei} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC}$$

Obs.: Raportul segmentelor determinate pe latura opusă este egal cu raportul laturilor care formează unghiul.

$$DC = \frac{BD \cdot AC}{AB} = \frac{9 \cdot 16}{12} = \frac{3 \cdot 4 \cdot 4}{4} = 12$$

$$DC = 12 \text{ cm}$$

Exercițiul 2. În triunghiul ABC , AD este bisectoarea unghiului A , cu $D \in BC$. Știind că $BD = 10$ cm, $DC = 15$ cm și $AC = 18$ cm, calculează lungimea laturii AB .

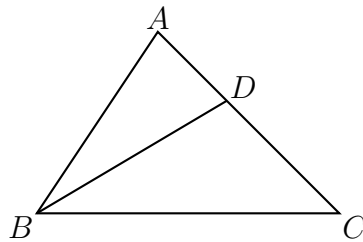


În $\triangle ABC$: AD - bisectoarea $\angle BAC$ $\left. \begin{array}{l} \text{Teorema} \\ \text{bisectoarei} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC}$

$$AB = \frac{BD \cdot AC}{DC} = \frac{10 \cdot 18}{15} = \frac{2 \cdot 18}{3} = 12 \text{ cm}$$

Exercițiul 3. Fie triunghiul ABC și BD bisectoarea unghiului B , cu $D \in AC$. Se dau $AB = 15$ cm, $BC = 24$ cm și $AC = 26$ cm.

- Calculează lungimile segmentelor AD și DC .
- Verifică relația din teorema bisectoarei folosind rezultatele obținute.



a)

$\triangle ABC$: BD - bisectoarea lui $\angle ABC$ $\left. \begin{array}{l} \text{Teorema} \\ \text{bisectoarei} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{AD}{DC} = \frac{AB}{BC}$

$$\frac{AD}{DC} = \frac{15}{24} = \frac{5}{8} = k$$

$$AD = 5k \text{ și } DC = 8k$$

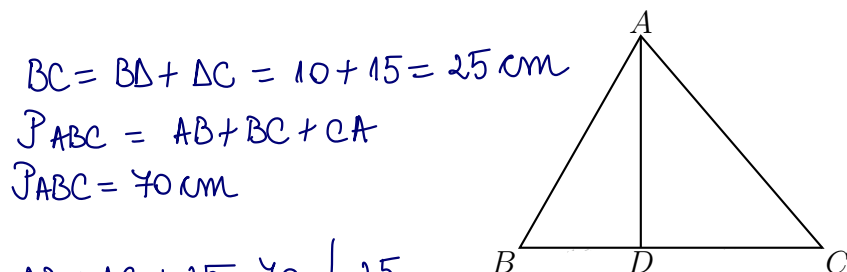
$$AC = AD + DC \Rightarrow 5k + 8k = 26$$

$$AC = 26 \text{ cm} \Rightarrow 13k = 26 \quad | : 13 \Rightarrow k = 2 \Rightarrow \begin{array}{l} AD = 5 \cdot 2 = 10 \text{ cm} \\ DC = 8 \cdot 2 = 16 \text{ cm} \end{array}$$

b)

$$\frac{AD}{DC} = \frac{10}{16} = \frac{5}{8} \text{ și } \frac{AB}{BC} = \frac{15}{24} = \frac{5}{8} \Rightarrow \text{Relația este verificată}$$

Exercițiul 4. Se consideră triunghiul ABC cu perimetrul de 70 cm. Bisectoarea unghiului A împarte latura BC în două segmente cu lungimile de 10 cm și 15 cm. Calculează lungimile laturilor AB și AC .



$$BC = BD + DC = 10 + 15 = 25 \text{ cm}$$

$$P_{ABC} = AB + BC + CA$$

$$P_{ABC} = 70 \text{ cm}$$

$$AB + AC + 25 = 70 \quad | -25$$

$$AB + AC = 45$$

AD - bisectoarea $\angle BAC \xRightarrow[\text{Teorema}]{\text{bisecciei}}$ $\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC} \Rightarrow \frac{AB}{AC} = \frac{10}{15} = \frac{2}{3}$

$$AB = 2k, AC = 3k$$

$$2k + 3k = 45$$

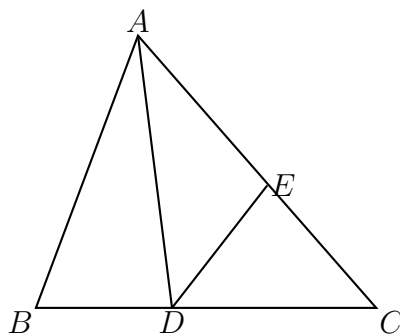
$$5k = 45 : 5 \Rightarrow k = 9 \Rightarrow AB = 2 \cdot 9 = 18 \text{ cm}$$

$$AC = 3 \cdot 9 = 27 \text{ cm}$$

Exercițiul 5. În triunghiul ABC , AD este bisectoarea unghiului A ($D \in BC$). Prin punctul D se duce o paralelă la latura AB , care intersectează latura AC în punctul E . Știind că $AC = 12$ cm și $AB = 8$ cm:

(a) Determină raportul $\frac{CD}{DB}$.

(b) Calculează lungimile segmentelor CE și EA .



a) În $\triangle ABC$: AD - bisectoarea $\angle BAC \xRightarrow[\text{Teorema}]{\text{bisecciei}}$ $\frac{CD}{BD} = \frac{AC}{AB}$

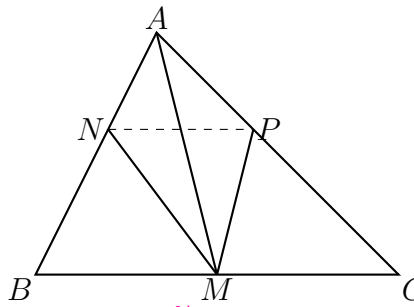
$$\frac{CD}{BD} = \frac{12}{8} \Rightarrow \frac{CD}{BD} = \frac{3}{2}$$

b) $DE \parallel BA \Rightarrow \frac{CE}{EA} = \frac{CD}{DB} = \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{CE}{CE+EA} = \frac{3}{3+2} \Rightarrow \frac{CE}{AC} = \frac{3}{5}$

$$CE = \frac{3AC}{5} = \frac{3 \cdot 12}{5} = 7,2 \text{ cm}$$

$$AC = AE + EC \Rightarrow AE = AC - EC = 12 - 7,2 = 4,8 \text{ cm}$$

Exercițiul 6. Fie triunghiul ABC și M mijlocul laturii BC . Bisectoarea unghiului $\angle AMB$ intersectează latura AB în N , iar bisectoarea unghiului $\angle AMC$ intersectează latura AC în P . Demonstrează că $NP \parallel BC$.



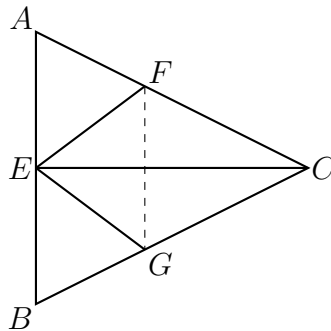
În $\triangle ABM$: MN - bisectoarea $\angle BMA$
 $N \in AB$ $\xRightarrow[\text{bisectoarea}]{\text{Teorema}}$ $\frac{NA}{NB} = \frac{MA}{MB}$ (1)

În $\triangle ACM$: MP - bisectoarea $\angle AMC$
 $P \in AC$ $\xRightarrow[\text{bisectoarea}]{\text{Teorema}}$ $\frac{PA}{PC} = \frac{MA}{MC}$ (2)

M - mijlocul lui $BC \Rightarrow MB = MC$ (3)

Din (1), (2), (3) $\Rightarrow \frac{NA}{NB} = \frac{PA}{PC} \xRightarrow[\text{Teorema lui Thales}]{\text{Reciprocă}} NP \parallel BC$

Exercițiul 7. În triunghiul ABC , fie E mijlocul laturii AB . Construim EF bisectoarea unghiului $\angle AEC$ ($F \in AC$) și EG bisectoarea unghiului $\angle CEB$ ($G \in BC$). Arată că dreapta FG este paralelă cu latura AB .



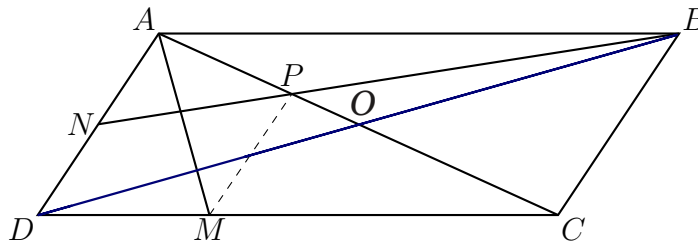
În $\triangle AEC$: EF - bisectoarea $\angle AEC$
 $F \in AC$ $\xRightarrow[\text{bisectoarea}]{\text{Teorema}}$ $\frac{AF}{FC} = \frac{AE}{EC}$

În $\triangle CEB$: EG - bisectoarea $\angle CEB$
 $G \in BC$ $\xRightarrow[\text{bisectoarea}]{\text{Teorema}}$ $\frac{BG}{GC} = \frac{EB}{EC}$

$AE = EB \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \frac{AF}{FC} = \frac{EB}{EC} \\ \frac{BG}{GC} = \frac{EB}{EC} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{AF}{FC} = \frac{BG}{GC} \Rightarrow \frac{CF}{FA} = \frac{CG}{GB} \xRightarrow[\text{Teorema lui Thales}]{\text{Reciprocă}} FG \parallel AB$

Exercițiul 8. În paralelogramul $ABCD$, avem $AC = 2 \cdot AD$. Fie N mijlocul laturii AD și semidreapta $[AM$ bisectoarea unghiului $\angle DAC$, cu $M \in DC$. Notăm cu P intersecția dintre BN și AC .

- (a) Arată că $\frac{DM}{MC} = \frac{1}{2}$.
 (b) Demonstrează că $MP \parallel BC$.



a)

În $\triangle ADC$:
 AM - bisectoarea $\angle DAC$ } $\Rightarrow$ Teorema bisectoarei $\frac{DM}{MC} = \frac{AD}{AC}$

$$AC = 2AD \Rightarrow \frac{AD}{AC} = \frac{AD}{2AD} \Rightarrow \frac{AD}{AC} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{DM}{MC} = \frac{AD}{AC} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{DM}{MC} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{CM}{MD} = 2 \quad (1)$$

b)

Construim diagonala BD

Fie $\{O\} = AC \cap BD \Rightarrow O$ - mijlocul lui $BD \Rightarrow AO$ - mediană în $\triangle ABD$

N - mijlocul lui $AD \Rightarrow BN$ - mediană în $\triangle ABD$

$\{P\} = BN \cap AO$

Deoarece P este intersecția a două mediane, rezultă că P este centrul de greutate al $\triangle ABD$.

Uls.: Centrul de greutate se află la $\frac{2}{3}$ de vârf și $\frac{1}{3}$ de bază.

$$AP = \frac{2}{3} \cdot AO$$

$$\begin{aligned} AO &= OC \\ CP &= OC + OP \\ OP &= \frac{1}{3} AO \end{aligned} \Rightarrow CP = \frac{2}{3} AO + \frac{1}{3} AO = \frac{4}{3} AO$$

$$\frac{CP}{PA} = \frac{\frac{4}{3} AO}{\frac{2}{3} AO} = 2 \Rightarrow \frac{CP}{PA} = 2 \quad (2)$$

Dim (1) și (2) $\Rightarrow \frac{CM}{MD} = \frac{CP}{PA}$ $\xRightarrow[\text{Teorema lui Thales}]{\text{Reciprocă}}$ $MP \parallel AD$ Dar $AD \parallel BC \Rightarrow MP \parallel BC$