

Lecția 3 - Teorema catetei

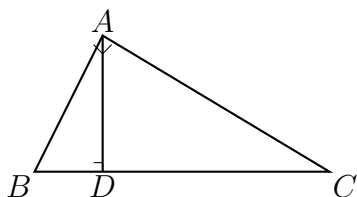
Clasa a 7-a – Capitolul Geometrie

Instrucțiuni

Rezolvă exercițiile folosind Teorema Catetei: într-un triunghi dreptunghic, lungimea unei catete este media geometrică a lungimii ipotenuzei și a lungimii proiecției acelei catete pe ipotenuză ($c^2 = pr \cdot ip$). Durata recomandată: **50 de minute**.

Exerciții

Exercițiul 1. Se consideră triunghiul dreptunghic ABC cu $\angle A = 90^\circ$ și înălțimea $AD \perp BC$ ($D \in BC$). Se știe că ipotenuza $BC = 20$ cm și proiecția catetei AB pe ipotenuză este $BD = 5$ cm. Calculează lungimea catetei AB .



Lungimea catetei AB este media geometrică dintre ipotenuza BC și proiecția catetei AB : BD .

$$AB = \sqrt{BD \cdot BC}$$

$$BD = 5 \text{ cm}$$

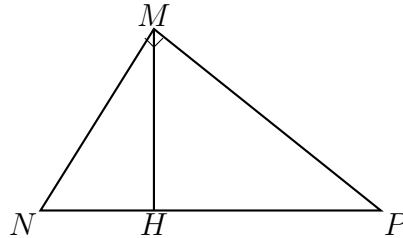
$$BC = 20 \text{ cm}$$

$$AB = \sqrt{5 \cdot 20}$$

$$AB = \sqrt{100}$$

$$AB = 10 \text{ cm}$$

Exercițiul 2. În triunghiul dreptunghic MNP ($\angle M = 90^\circ$), construim înălțimea $MH \perp NP$. Știind că cateta $MN = 12$ cm și ipotenuza $NP = 18$ cm, determină lungimea proiecției NH a catetei MN pe ipotenuză.



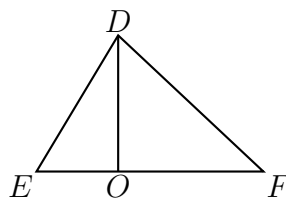
conform teoremei catetei:

$$MN = \sqrt{NH \cdot NP}$$

$$MN^2 = NH \cdot NP \Rightarrow NH = \frac{MN^2}{NP} = \frac{144}{18} = 8 \text{ cm}$$

Exercițiul 3. Fie triunghiul dreptunghic DEF ($\angle D = 90^\circ$) și $DO \perp EF$ ($O \in EF$). Dacă lungimea ipotenuzei este $EF = 25$ cm și proiecția catetei DE este $EO = 9$ cm:

- Calculează lungimea catetei DE .
- Determină lungimea proiecției OF și apoi calculează lungimea catetei DF .



a) $\triangle DEF: m(\angle D) = 90^\circ$ *Teorema catetelor* $\Rightarrow DE^2 = EO \cdot EF$
 $DO \perp EF, O \in EF$

$$DE^2 = EO \cdot EF = 9 \cdot 25 = 225$$

$$\sqrt{DE^2} = \sqrt{225} \Rightarrow DE = 15 \text{ cm}$$

b) $O \in EF \Rightarrow EO + OF = EF$
 $OF = EF - EO = 25 - 9 = 16 \text{ cm}$

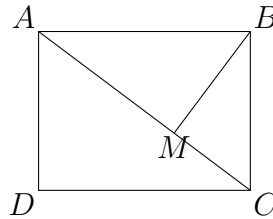
conform teoremei catetelor:

$$DF^2 = OF \cdot EF = 16 \cdot 25 = 400$$

$$\sqrt{DF^2} = \sqrt{400} \Rightarrow DF = 20 \text{ cm}$$

Exercițiul 4. Fie dreptunghiul $ABCD$. Perpendiculara din vârful B pe diagonala AC intersectează diagonala în punctul M . Știind că segmentele determinate pe diagonală sunt $AM = 3,6$ cm și $MC = 6,4$ cm:

- Calculează lungimea diagonalei AC .
- Determină lungimile laturilor AB și BC ale dreptunghiului.



a)

$$M \in AC \Rightarrow AM + MC = AC$$

$$AM = 3,6 \text{ cm}$$

$$MC = 6,4 \text{ cm}$$

$$AC = 3,6 + 6,4$$

$$AC = 10 \text{ cm}$$

b)

$$ABCD - \text{dreptunghi} \Rightarrow m(\angle ABC) = 90^\circ$$

În $\triangle ABC$:

$$m(\angle B) = 90^\circ$$

$$BM \perp AC, M \in AC$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Teorema} \\ \text{catetelor} \end{array} \right\} \Rightarrow AB^2 = AM \cdot AC$$

$$AB^2 = AM \cdot AC$$

$$AB^2 = 3,6 \cdot 10 = 36 \Rightarrow \sqrt{AB^2} = \sqrt{36} \Rightarrow AB = 6 \text{ cm}$$

În $\triangle ABC$:

$$m(\angle B) = 90^\circ$$

$$BM \perp AC, M \in AC$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Teorema} \\ \text{catetelor} \end{array} \right\} \Rightarrow BC^2 = MC \cdot AC$$

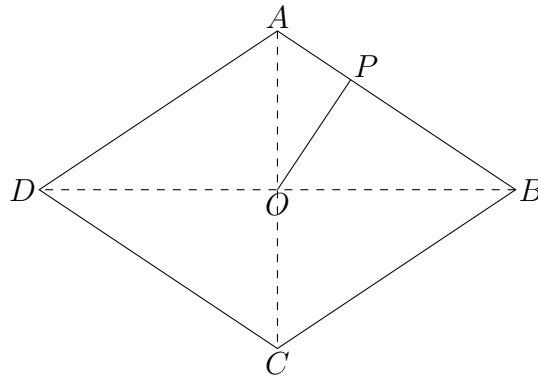
3

$$BC^2 = MC \cdot AC = 6,4 \cdot 10 = 64$$

$$\sqrt{BC^2} = \sqrt{64} \Rightarrow BC = 8 \text{ cm}$$

Exercițiul 5. Se consideră rombul $ABCD$ cu diagonalele $AC \cap BD = \{O\}$. Fie P proiecția punctului O pe latura AB . Știind că $AP = 4$ cm și $PB = 9$ cm:

- Calculează lungimea laturii rombului.
- Determină lungimile semidiagonalelor OA și OB , apoi lungimile diagonalelor AC și BD .



a) $ABCD - \text{romb} \Rightarrow AB = BC = CD = DA = l$

$P \in AB \Rightarrow AP + PB = AB$

$AP = 4 \text{ cm}$

$PB = 9 \text{ cm}$

$AB = 4 + 9 = 13 \text{ cm} \Rightarrow l = 13 \text{ cm}$

b)

$ABCD - \text{romb} \left\{ \begin{array}{l} \Rightarrow AO \perp OB \Rightarrow m(\angle AOB) = 90^\circ \\ AC \cap BD = \{O\} \end{array} \right.$

$\triangle AOB:$
 $m(\angle O) = 90^\circ$
 $OP \perp AB, P \in AB$
 $\left\{ \begin{array}{l} \text{Teorema} \\ \text{catetelor} \end{array} \right. \Rightarrow OA^2 = AP \cdot AB$

$OA^2 = AP \cdot AB = 4 \cdot 13 \Rightarrow OA = \sqrt{4 \cdot 13} = 2\sqrt{13} \text{ cm}$

$\triangle AOB:$
 $m(\angle O) = 90^\circ$
 $OP \perp AB, P \in AB$
 $\left\{ \begin{array}{l} \text{Teorema} \\ \text{catetelor} \end{array} \right. \Rightarrow OB^2 = PB \cdot AB$

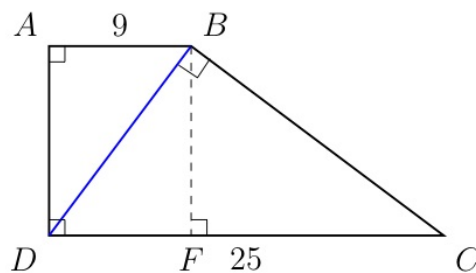
$OB^2 = PB \cdot AB = 9 \cdot 13 \Rightarrow OB = \sqrt{9 \cdot 13} = 3\sqrt{13}$

$AC = 2 \cdot AO = 2 \cdot 2\sqrt{13} = 4\sqrt{13} \text{ cm}$

$BD = 2 \cdot OB = 2 \cdot 3\sqrt{13} = 6\sqrt{13} \text{ cm}$

Exercițiul 6. Fie trapezul dreptunghic $ABCD$ cu $AB \parallel CD$, $AB < CD$ și $\angle A = \angle D = 90^\circ$. Diagonala BD este perpendiculară pe latura ne paralelă BC ($BD \perp BC$). Știind că baza mică $AB = 9$ cm și baza mare $CD = 25$ cm:

- Construiește înălțimea $BF \perp CD$, cu $F \in CD$, și determină lungimile segmentelor DF și FC .
- Calculează lungimea diagonalei BD și a laturii BC folosind teorema catetei în triunghiul dreptunghic BDC .



a)

În trapezul dreptunghic $ABCD$, prin construcția înălțimii $BF \perp CD$, $F \in CD$, se formează patrulaterul $ABFD$.

$$ABCD - \text{trapez} \Rightarrow \begin{matrix} AB \parallel CD \\ FE \subset DC \end{matrix} \Rightarrow AB \parallel DF$$

$$\begin{matrix} AD \perp DC \\ BF \perp DC \end{matrix} \Rightarrow AD \parallel BF$$

$$\begin{matrix} AD \parallel BF \\ AB \parallel DF \end{matrix} \Rightarrow ABFD - \text{dreptunghi} \Rightarrow DF = AB = 9 \text{ cm}$$

$$FE \subset CD \Rightarrow DF + FC = DC \Rightarrow FC = DC - DF = 25 - 9 = 16 \text{ cm}$$

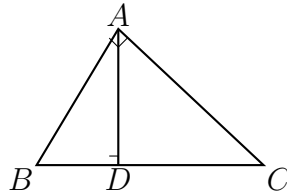
b)

$$\begin{array}{l} \text{În } \triangle BDC: \\ m(\angle B) = 90^\circ \\ BF \perp DC, FE \subset DC \end{array} \left\{ \begin{array}{l} \text{Teorema} \\ \text{catetei} \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} BD^2 = DF \cdot CD \\ BD^2 = 9 \cdot 25 \\ \sqrt{BD^2} = \sqrt{225} \Rightarrow BD = 15 \text{ cm} \end{array} \right.$$

$$\begin{array}{l} \text{În } \triangle BDC: \\ m(\angle B) = 90^\circ \\ BF \perp DC, FE \subset DC \end{array} \left\{ \begin{array}{l} \text{Teorema} \\ \text{catetei} \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} BC^2 = FC \cdot CD \\ BC^2 = 16 \cdot 25 \\ \sqrt{BC^2} = \sqrt{400} \Rightarrow BC = 20 \text{ cm} \end{array} \right.$$

Exercițiul 7. În triunghiul dreptunghic ABC ($\angle A = 90^\circ$, $AD \perp BC$), raportul dintre cateta AB și proiecția sa BD este $\frac{5}{3}$, iar $CD = 16$ cm.

- (a) Determină lungimea segmentului BD .
 (b) Calculează perimetrul triunghiului ABC .



a)

$$\begin{array}{l} \text{În } \triangle ABC: \\ m(\angle A) = 90^\circ \\ AD \perp BC, D \in BC \end{array} \left\{ \begin{array}{l} \text{Teorema} \\ \text{catetelor} \end{array} \right. \Rightarrow AB^2 = BD \cdot BC$$

$$\frac{AB}{BD} = \frac{5}{3} \Rightarrow AB = \frac{5}{3} BD$$

$$\begin{array}{l} D \in BC \Rightarrow DB + DC = BC \\ DC = 16 \text{ cm} \end{array} \Rightarrow BC = BD + 16$$

$$AB^2 = BD \cdot BC$$

$$\left(\frac{5}{3} BD\right)^2 = BD \cdot BC \Rightarrow \frac{25}{9} BD^2 = BD \cdot (BD + 16)$$

$$\frac{25}{9} BD^2 = BD^2 + 16BD \quad | \cdot 9 \Rightarrow 25BD^2 = 9BD^2 + 144BD \quad | : BD$$

$$25BD = 9BD + 144 \quad | - 9BD \Rightarrow 16BD = 144 \quad | : 16 \Rightarrow BD = 9 \text{ cm}$$

b)

$$BC = BD + DC = 9 + 16 = 25 \text{ cm}$$

$$AB = \frac{5}{3} BD = \frac{5}{3} \cdot 9 = 5 \cdot 3 = 15 \text{ cm}$$

$$\begin{array}{l} \text{În } \triangle ABC: \\ m(\angle A) = 90^\circ \\ AD \perp BC, D \in BC \end{array} \left\{ \begin{array}{l} \text{Teorema} \\ \text{catetelor} \end{array} \right. \Rightarrow AC^2 = CD \cdot BC = 16 \cdot 25 = 400$$

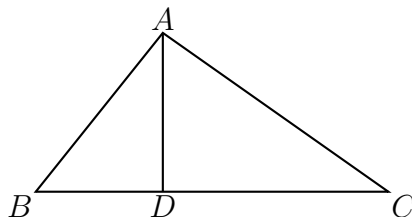
$$\sqrt{AC^2} = \sqrt{400} \Rightarrow AC = 20 \text{ cm}$$

$$P_{\triangle ABC} = AB + BC + CA = 15 + 25 + 20 = 60 \text{ cm}$$

Exercițiul 8. Perimetrul unui triunghi dreptunghic ABC ($\angle A = 90^\circ$) este egal cu 60 cm. Raportul catetelor este $\frac{AB}{AC} = \frac{3}{4}$.

(a) Demonstrează că raportul proiecțiilor catetelor pe ipotenuză este $\frac{BD}{CD} = \frac{9}{16}$.

(b) Calculează lungimile laturilor triunghiului ABC și lungimile proiecțiilor BD și CD .



a)

$$\begin{array}{l} \text{În } \triangle ABC: \\ m(\angle A) = 90^\circ \\ AD \perp BC, D \in BC \end{array} \left\{ \begin{array}{l} \text{Teorema} \\ \text{catetelor} \end{array} \right. \Rightarrow AB^2 = BD \cdot BC \quad (1)$$

$$\begin{array}{l} \text{În } \triangle ABC: \\ m(\angle A) = 90^\circ \\ AD \perp BC, D \in BC \end{array} \left\{ \begin{array}{l} \text{Teorema} \\ \text{catetelor} \end{array} \right. \Rightarrow AC^2 = CD \cdot BC \quad (2)$$

Împărțim (1) la (2)

$$\frac{AB^2}{AC^2} = \frac{BD \cdot \cancel{BC}}{CD \cdot \cancel{BC}} \Rightarrow \frac{AB^2}{AC^2} = \frac{BD}{CD} \Rightarrow \frac{BD}{CD} = \left(\frac{3}{4}\right)^2 \Rightarrow \frac{BD}{CD} = \frac{9}{16}$$

$$\text{b.) } BD + CD = BC \quad \frac{BD}{CD} = \frac{9}{16} \Rightarrow \frac{BD}{BD + CD} = \frac{9}{9 + 16} \Rightarrow \frac{BD}{BC} = \frac{9}{25} \Rightarrow BD = \frac{9}{25} BC$$

$$CD = \frac{16}{9} BD = \frac{16}{9} \cdot \frac{9}{25} BC \Rightarrow CD = \frac{16}{25} BC$$

$$AB^2 = BD \cdot BC = \frac{9}{25} BC \cdot BC = \frac{9}{25} BC^2 \Rightarrow AB = \sqrt{\frac{9}{25} BC^2} = \frac{3}{5} BC$$

$$AC^2 = CD \cdot BC = \frac{16}{25} BC \cdot BC = \frac{16}{25} BC^2 \Rightarrow AC = \sqrt{\frac{16}{25} BC^2} = \frac{4}{5} BC$$

$$P_{ABC} = AB + AC + BC = \frac{3}{5} BC + \frac{4}{5} BC + BC \quad | \cdot 5 \Rightarrow 3BC + 4BC + 5BC = 5P_{ABC}$$

$$12BC = 5 \cdot 60$$

$$12BC = 300 \quad | : 12 \Rightarrow BC = 25 \text{ cm}$$

$$AB = \frac{3}{5} \cdot 25 = 3 \cdot 5 = 15 \text{ cm}$$

$$AC = \frac{4}{5} \cdot 25 = 4 \cdot 5 = 20 \text{ cm}$$

$$BD = \frac{9}{25} \cdot 25 = 9 \text{ cm}$$

$$CD = \frac{16}{25} \cdot 25 = 16 \text{ cm}$$