

Lecția 3 – Prisma regulată

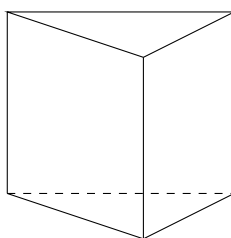
Clasa a 8-a – Capitolul 2 – Aree și volume ale unor corpuri geometrice

Instrucțiuni

Rezolvă exercițiile folosind formulele specifice prismelor regulate. *Reține: Prismele regulate au bazele poligoane regulate (triunghi echilateral, pătrat, hexagon regulat) și înălțimea egală cu muchia laterală.* Durata recomandată: **50 minute**.

Exerciții

Exercițiul 1. O prismă triunghiulară regulată are latura bazei $l = 6$ cm și înălțimea $h = 10$ cm. Calculați aria laterală și aria totală a prisme.



Exercițiul 2. O prismă hexagonală regulată are latura bazei $l = 4$ cm și înălțimea $h = 5\sqrt{3}$ cm. Calculați volumul prisme.

Exercițiul 3. O prismă patrulateră regulată (baza este un pătrat) are volumul $V = 128$ cm³ și înălțimea $h = 8$ cm. Calculați lungimea laturii bazei.

Exercițiul 4. O prismă triunghiulară regulată are aria totală egală cu $18(\sqrt{3} + 6)$ cm² și latura bazei de 6 cm. Calculați înălțimea prisme.

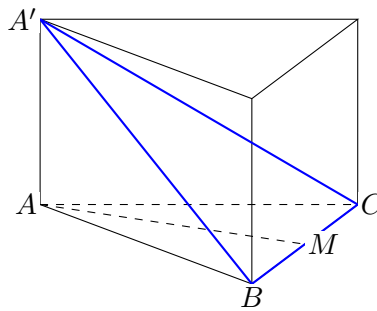
Exercițiul 5. O prismă hexagonală regulată are latura bazei $l = 4$ cm și aria laterală $A_l = 192$ cm². Calculați înălțimea și volumul prisme.

Exercițiul 6. Fie prisma patrulateră regulată $ABCD A' B' C' D'$ cu latura bazei $AB = 6$ cm. Diagonala prisme BD' formează cu planul bazei $(ABCD)$ un unghi de 60° .

- Calculați înălțimea prisme.
- Calculați distanța de la punctul A la planul $(A'BD)$.

Exercițiul 7. Se consideră prisma triunghiulară regulată $ABCA' B' C'$ cu latura bazei $AB = 12$ cm și înălțimea $AA' = 6\sqrt{3}$ cm. Fie M mijlocul laturii BC .

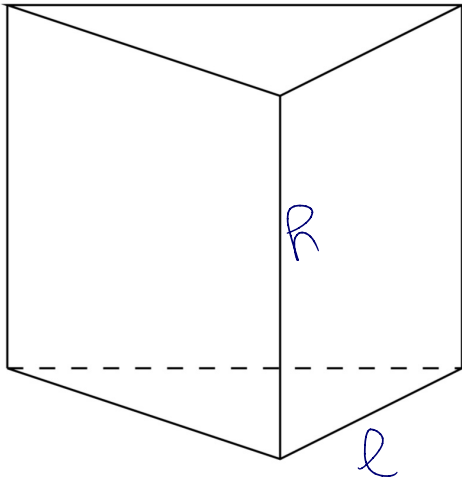
- Arătați că măsura unghiului dintre planul $(A'BC)$ și planul bazei (ABC) este de 45° .
- Calculați distanța de la punctul A la planul $(A'BC)$.



Exercițiul 8. Se consideră o prismă hexagonală regulată $ABCDEF A' B' C' D' E' F'$ cu latura bazei $l = 4$ cm și înălțimea $h = 12$ cm. O furnică pleacă din vârful A și dorește să ajungă în vârful D' (vârful opus de pe baza superioară), deplasându-se doar pe fețele laterale ale prisme. Calculați lungimea celui mai scurt drum posibil.

Succes!

Exercițiul 1. O prismă triunghiulară regulată are latura bazei $l = 6$ cm și înălțimea $h = 10$ cm. Calculați aria laterală și aria totală a prisme.



$$\left. \begin{aligned} A_l &= P_b \cdot R \\ P_b &= 3 \cdot l \end{aligned} \right\} \Rightarrow A_l = 3 \cdot l \cdot R = 3 \cdot 6 \cdot 10$$

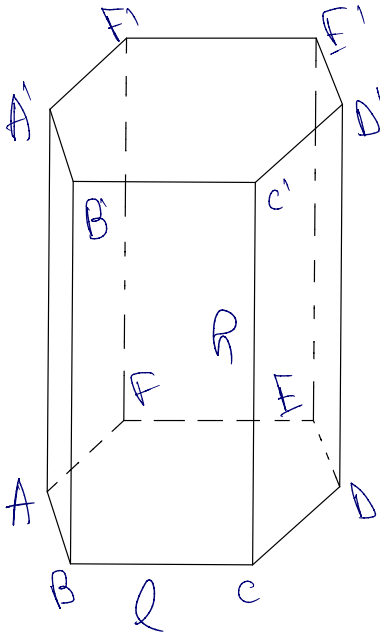
$$\Rightarrow A_l = 180 \text{ cm}^2$$

$$A_t = A_l + 2 \cdot A_b$$

$$A_b = \frac{l^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{6^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{36 \sqrt{3}}{4} = 9 \sqrt{3} \text{ cm}^2$$

$$\Rightarrow A_t = 180 + 2 \cdot 9 \sqrt{3} = 180 + 18 \sqrt{3} = 18(10 + \sqrt{3}) \text{ cm}^2$$

Exercițiul 2. O prismă hexagonală regulată are latura bazei $l = 4$ cm și înălțimea $h = 5\sqrt{3}$ cm. Calculați volumul prisme.

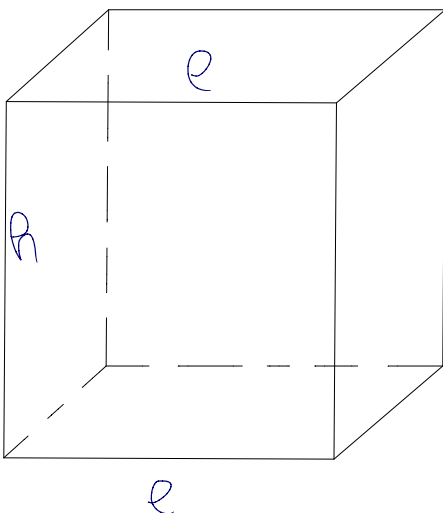


$$\left. \begin{aligned} V &= A_b \cdot R \\ A_b &= \frac{3l^2 \sqrt{3}}{2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow V = \frac{3l^2 \sqrt{3} \cdot R}{2}$$

$$\Rightarrow V = \frac{3 \cdot 4^2 \cdot \sqrt{3} \cdot 5\sqrt{3}}{2} = \frac{3 \cdot 16 \cdot 5 \cdot 3}{2}$$

$$\Rightarrow V = 360 \text{ cm}^3$$

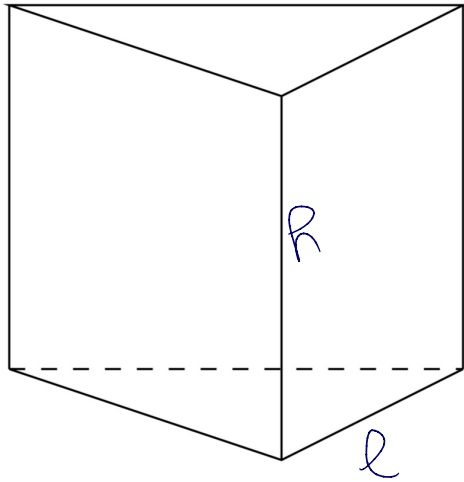
Exercițiul 3. O prismă patrulateră regulată (baza este un pătrat) are volumul $V = 128 \text{ cm}^3$ și înălțimea $h = 8$ cm. Calculați lungimea laturii bazei.



$$V = A_b \cdot R \Rightarrow A_b = \frac{V}{R} = \frac{128}{8} = 16 \text{ cm}^2$$

$$A_b = l^2 \Rightarrow l^2 = 16 \Rightarrow l = \sqrt{16} = 4 \text{ cm}$$

Exercițiul 4. O prismă triunghiulară regulată are aria totală egală cu $18(\sqrt{3} + 6)$ cm² și latura bazei de 6 cm. Calculați înălțimea prisme.



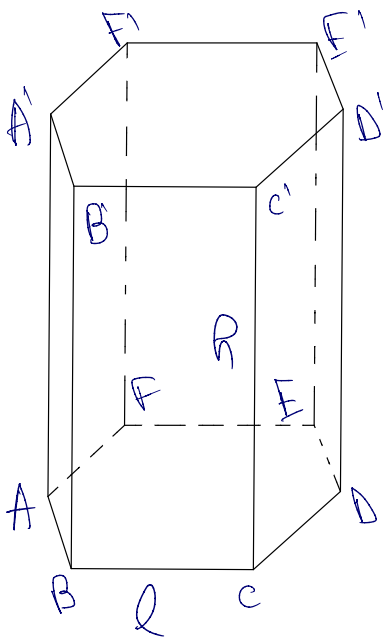
$$\begin{aligned} A_t &= A_e + 2 \cdot A_b \\ A_b &= \frac{l^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{6^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{36 \sqrt{3}}{4} = 9\sqrt{3} \text{ cm}^2 \\ 18(\sqrt{3} + 6) &= A_e + 9\sqrt{3} \\ 18\sqrt{3} + 18 \cdot 6 &= A_e + 2 \cdot 9\sqrt{3} \Rightarrow \\ \Rightarrow 18\sqrt{3} + 108 &= A_e + 18\sqrt{3} \Rightarrow A_e = 108 \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} A_t &= A_e + 2 \cdot A_b \\ A_b &= \frac{l^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{6^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{36 \sqrt{3}}{4} = 9\sqrt{3} \text{ cm}^2 \\ 18(\sqrt{3} + 6) &= A_e + 9\sqrt{3} \\ 18\sqrt{3} + 18 \cdot 6 &= A_e + 2 \cdot 9\sqrt{3} \Rightarrow \\ \Rightarrow 18\sqrt{3} + 108 &= A_e + 18\sqrt{3} \Rightarrow A_e = 108 \end{aligned}} \right\} \Rightarrow$$

$$A_e = P_b \cdot R \quad \left. \vphantom{A_e = P_b \cdot R} \right\} \Rightarrow A_e = 3 \cdot l \cdot R$$

$$P_b = 3l$$

$$\Rightarrow 3 \cdot 6 \cdot R = 108 \Rightarrow 18 \cdot R = 108 / 18 \Rightarrow R = 6 \text{ cm}$$

Exercițiul 5. O prismă hexagonală regulată are latura bazei $l = 4$ cm și aria laterală $A_l = 192$ cm². Calculați înălțimea și volumul prisme.

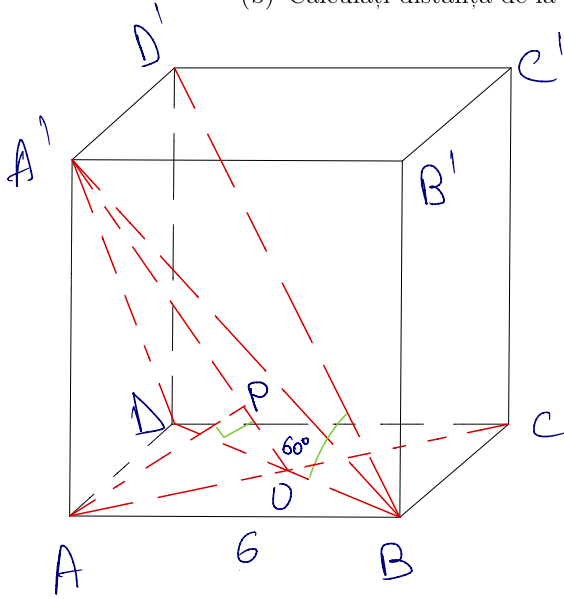


$$\begin{aligned} A_l &= 192 \text{ cm}^2 \\ A_l &= P_b \cdot R = 6 \cdot l \cdot R = 6 \cdot 4 \cdot R = 24 \cdot R \quad \left. \vphantom{A_l = P_b \cdot R} \right\} \Rightarrow \\ \Rightarrow 24 \cdot R &= 192 / 24 \Rightarrow R = 8 \text{ cm} \\ V &= A_b \cdot R = \frac{3l^2 \sqrt{3}}{2} \cdot R \Rightarrow V = \frac{3 \cdot 4^2 \cdot \sqrt{3} \cdot 8}{2} \\ \Rightarrow V &= 3 \cdot 16 \cdot \sqrt{3} \cdot 4 \Rightarrow V = 192\sqrt{3} \text{ cm}^3 \end{aligned}$$

Exercițiul 6. Fie prisma patrulateră regulată $ABCD A' B' C' D'$ cu latura bazei $AB = 6$ cm. Diagonala prismei BD' formează cu planul bazei $(ABCD)$ un unghi de 60° .

(a) Calculați înălțimea prismei.

(b) Calculați distanța de la punctul A la planul $(A'BD)$.



$$\begin{aligned} a) \quad D'D \perp (ABCD) &\Rightarrow \mathcal{P}_{(ABCD)} D' = D \\ \mathcal{P}_{(ABCD)} B &= B \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \mathcal{P}_{(ABCD)} D'B &= DB \Rightarrow \angle(D'B, (ABCD)) = \\ &= \angle(D'B, DB) = \angle D'BD = 60^\circ \end{aligned}$$

$$ABCD \text{ pătrat} \rightarrow BD = 6\sqrt{2} \text{ cm}$$

$$\text{În } \triangle D'BD \text{ dreptunghic: } \tan 60^\circ = \frac{DD'}{BD} \Rightarrow \sqrt{3} = \frac{h}{6\sqrt{2}} \Rightarrow h = 6\sqrt{6} \text{ cm}$$

b) $AC \cap BD = \{O\}$. Ducem $AP \perp A'O$, $P \in A'O$.

$$\begin{aligned} A'B &= A'D \Rightarrow \triangle A'BD \text{ isoscel} \\ DO &= OB \Rightarrow A'O \text{ mediană} \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} \Rightarrow A'O \perp BD$$

$$\begin{aligned} BD &\perp A'O \\ BD &\perp AO \\ A'O \cap AO &= \{O\} \\ A'O, AO &\subset (A'AO) \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} \Rightarrow BD \perp (A'AO) \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} \Rightarrow BD \perp AP$$

$$\begin{aligned} AP &\perp A'O \\ AP &\perp BD \\ A'O \cap BD &= \{O\} \\ A'O, BD &\subset (A'BD) \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} \Rightarrow AP \perp (A'BD) \Rightarrow d(A, (A'BD)) = AP$$

$$\text{În } \triangle A'AO \text{ dreptunghic: } AO = \frac{AC}{2} = \frac{6\sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{2} \text{ cm}$$

$$\text{T.P.: } A'O^2 = A'A^2 + AO^2 \Rightarrow A'O^2 = (6\sqrt{6})^2 + (3\sqrt{2})^2 = 36 \cdot 6 + 9 \cdot 2 \Rightarrow$$

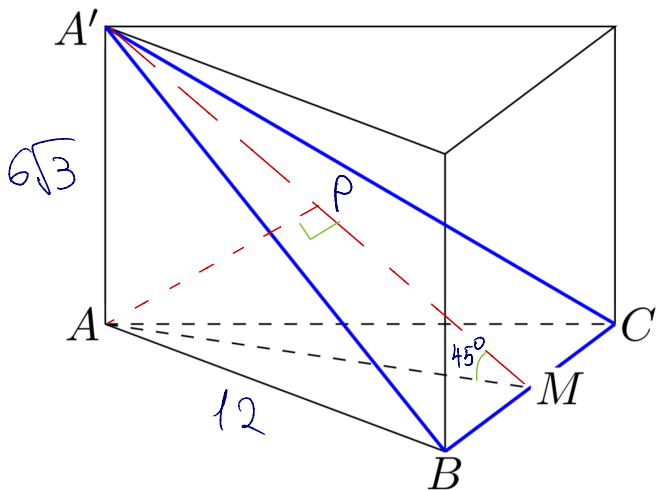
$$\Rightarrow A'O^2 = 234 \Rightarrow A'O = \sqrt{234} = 3\sqrt{26} \text{ cm}$$

$$AP = \frac{AA' \cdot AO}{A'O} = \frac{6\sqrt{6} \cdot 3\sqrt{2}}{3\sqrt{26}} = \frac{6\sqrt{6}}{\sqrt{13}} = 6\sqrt{\frac{6}{13}} \text{ cm}$$

Exercițiul 7. Se consideră prisma triunghiulară regulată $ABCA'B'C'$ cu latura bazei $AB = 12$ cm și înălțimea $AA' = 6\sqrt{3}$ cm. Fie M mijlocul laturii BC .

(a) Arătați că măsura unghiului dintre planul $(A'BC)$ și planul bazei (ABC) este de 45° .

(b) Calculați distanța de la punctul A la planul $(A'BC)$.



$$\left. \begin{array}{l} a) (A'BC) \cap (ABC) = BC \\ AM \perp BC \\ AM \subset (ABC) \\ A'M \perp BC \\ A'M \subset (A'BC) \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \angle((A'BC), (ABC)) = \angle(A'M, AM) = \angle A'MA$$

$$\Delta ABC \text{ echilateral} \Rightarrow AM = \frac{2\sqrt{3}}{2} = \frac{12\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3} \quad \left. \begin{array}{l} \Rightarrow AM = A'A \\ \text{cum } A'A \perp AM \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$A'A = 6\sqrt{3}$

$$\Rightarrow \Delta A'AM \text{ dreptunghic isoscel} \Rightarrow \angle A'MA = 45^\circ$$

b) Fie $AP \perp A'M$, $P \in A'M$.

$$A'B = A'C \Rightarrow \Delta A'BC \text{ isoscel} \Rightarrow AM \perp BC$$

$$BC \perp AM$$

$$BC \perp A'M$$

$$AM \cap A'M = \{M\}$$

$$AM, A'M \subset (A'AM)$$

$$\left. \begin{array}{l} \Rightarrow BC \perp (A'AM) \\ AP \subset (A'AM) \end{array} \right\} \Rightarrow BC \perp AP$$

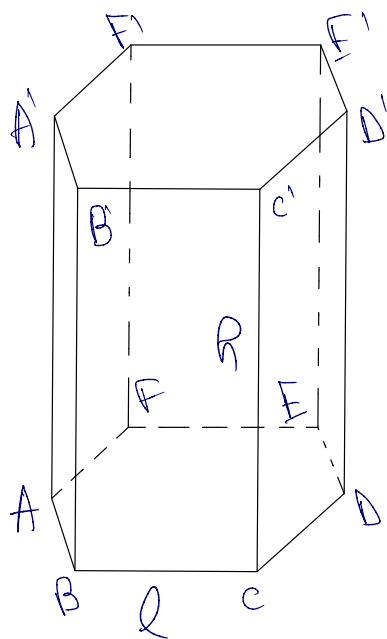
$$\left. \begin{array}{l} AP \perp A'M \\ BC \cap A'M = \{M\} \\ BC, A'M \subset (A'BC) \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow AP \perp (A'BC) \Rightarrow d(A, (A'BC)) = AP$$

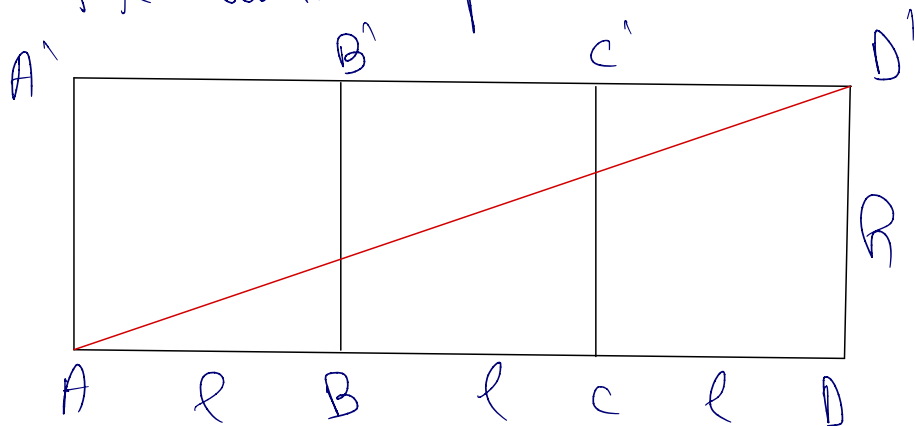
În $\Delta A'AM$ dreptunghic isoscel: $A'M = c \cdot \sqrt{2} = 6\sqrt{3} \cdot \sqrt{2} = 6\sqrt{6}$ cm

$\hookrightarrow AP \perp A'M \Rightarrow AP$ mediană $\Rightarrow AP = \frac{A'M}{2} = \frac{6\sqrt{6}}{2} = 3\sqrt{6}$ cm

Exercițiul 8. Se consideră o prismă hexagonală regulată $ABCDEF A' B' C' D' E' F'$ cu latura bazei $l = 4$ cm și înălțimea $h = 12$ cm. O furnică pleacă din vârful A și dorește să ajungă în vârful D' (vârful opus de pe baza superioară), deplasându-se doar pe fețele laterale ale prisme. Calculați lungimea celui mai scurt drum posibil.



Desfășurăm fețele laterale. Pentru a ajunge din A în D' , trebuie să parcurgem 3 fețe laterale după cum urmează:



Se formează astfel dreptunghiul $ADD'A$ cu lungimea $= 3l$ și lățimea $= h$.

$$AD = 3 \cdot l = 3 \cdot 4 = 12 \text{ cm}$$

$$DD' = 12 \text{ cm}$$

$$\left. \begin{array}{l} \Rightarrow AD = DD' \\ \angle ADD' = 90^\circ \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle ADD' \text{ dreptunghic isoscel} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow AD' = c \cdot \sqrt{2} = 12\sqrt{2} \text{ cm}$$