

Fișă de lucru

Lecția 3 - Reciproca Teoremei lui Thales

Clasa a 7-a – Capitolul Geometrie

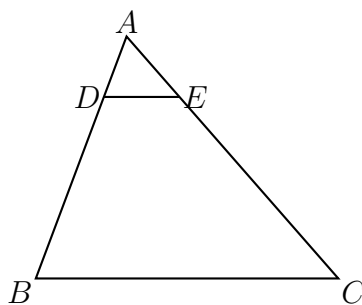
Instrucțiuni

Rezolvă exercițiile de mai jos folosind Reciproca Teoremei lui Thales. Pentru a demonstra că două drepte sunt paralele, verifică egalitatea rapoartelor formate pe secante. Durata recomandată: **45 de minute**.

Exerciții

Exercițiul 1. În triunghiul ABC , se consideră punctele $D \in AB$ și $E \in AC$. Se cunosc următoarele lungimi: $AD = 3$ cm, $DB = 9$ cm, $AE = 4$ cm și $EC = 12$ cm.

- Calculează valoarea rapoartelor $\frac{AD}{DB}$ și $\frac{AE}{EC}$.
- Precizează, justificând răspunsul, dacă dreapta DE este paralelă cu latura BC .



a)

$$\frac{AD}{DB} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$$

$$\frac{AE}{EC} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$$

b)

comparam rezultatele obținute la punctul a)

$$\left. \begin{array}{l} \frac{AD}{DB} = \frac{1}{3} \\ \frac{AE}{EC} = \frac{1}{3} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC} = \frac{1}{3}$$

conform Reciprocei Teoremei lui Thales, rezultă că $DE \parallel BC$.

Exercițiul 2. Se dă triunghiul MNP cu laturile $MN = 20$ cm și $MP = 25$ cm. Pe latura MN se ia punctul A astfel încât $MA = 5$ cm, iar pe latura MP se ia punctul B astfel încât $MB = 6,25$ cm. Stabilește dacă $AB \parallel NP$.

$$\frac{MA}{MN} = \frac{5}{20} = \frac{1}{4}$$

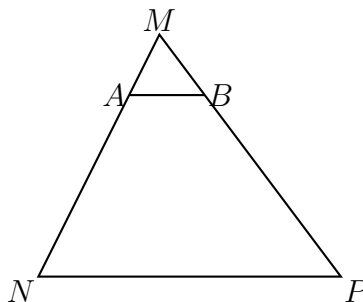
$$\frac{MB}{MP} = \frac{6,25}{25} = \frac{1}{4}$$

$$MN = MA + AN$$

$$MP = MB + BP$$

$$\frac{MA}{MN} = \frac{MB}{MP}$$

$$\frac{MA}{MA+AN} = \frac{MB}{MB+BP} \Rightarrow \frac{MA}{AN} = \frac{MB}{BP} \xrightarrow[\text{Teorema lui Thales}]{\text{Reciprocă}} AB \parallel NP$$



Exercițiul 3. Fie triunghiul RST . Punctul U aparține laturii RS astfel încât raportul $\frac{RU}{RS} = \frac{2}{7}$, iar punctul V aparține laturii RT astfel încât $RV = 6$ cm și $VT = 15$ cm. Verifică dacă dreapta UV este paralelă cu latura ST .

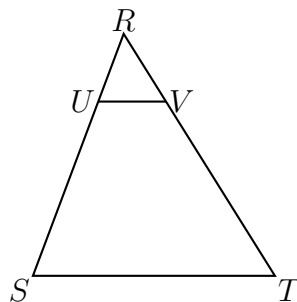
$$\frac{RU}{RS} = \frac{2}{7}$$

$$RT = RV + VT$$

$$RT = 6 + 15$$

$$RT = 21 \text{ cm}$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{RV}{RT} &= \frac{6}{21} = \frac{2}{7} \\ \frac{RU}{RS} &= \frac{2}{7} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{RV}{RT} = \frac{RU}{RS}$$



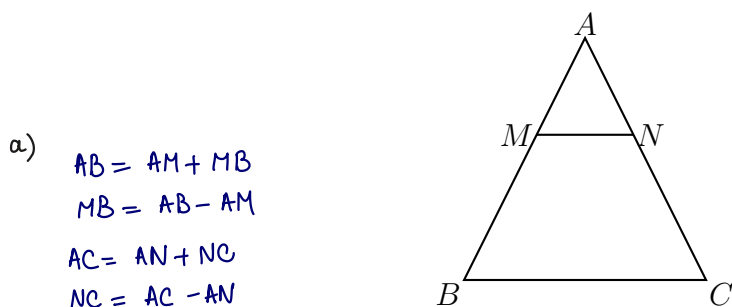
$$RS = RU + US$$

$$RT = RV + VT$$

$$\frac{RV}{RV+VT} = \frac{RU}{RU+US} \Rightarrow \frac{RV}{VT} = \frac{RU}{US} \xrightarrow[\text{Teorema lui Thales}]{\text{Reciprocă}} UV \parallel ST$$

Exercițiul 4. Se consideră triunghiul isoscel ABC ($AB \equiv AC$). Pe laturile AB și AC se iau punctele M , respectiv N , astfel încât $AM = AN$.

- Exprimă lungimile segmentelor MB și NC în funcție de laturile triunghiului.
- Demonstrează, folosind rapoartele, că $MN \parallel BC$.



a)

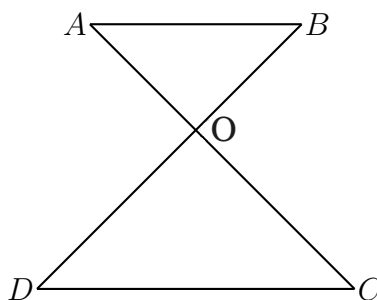
$$\begin{aligned} AB &= AM + MB \\ MB &= AB - AM \\ AC &= AN + NC \\ NC &= AC - AN \end{aligned}$$

Deoarece $AB = AC$ și $AM = AN \Rightarrow MB = NC$

b)

$$\begin{aligned} \left. \begin{array}{l} AB = AC \\ AM = AN \end{array} \right\} &\Rightarrow \frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} \\ \frac{AM}{AM + MB} = \frac{AN}{AN + NC} &\Rightarrow \frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NC} \Rightarrow \text{Reciprocă} \\ &\quad \text{Teoremei lui Thales} \Rightarrow MN \parallel BC \end{aligned}$$

Exercițiul 5. În figura de mai jos, dreptele AC și BD se intersectează în punctul O . Se dau lungimile: $OA = 6$ cm, $OC = 9$ cm, $OB = 8$ cm și $OD = 12$ cm. Determină dacă dreptele AB și CD sunt paralele.



Verificăm dacă laturile $\triangle OAB$ sunt proporționale cu laturile $\triangle OCD$.

Raportul pe prima secantă (AC):

$$\frac{OA}{OC} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$$

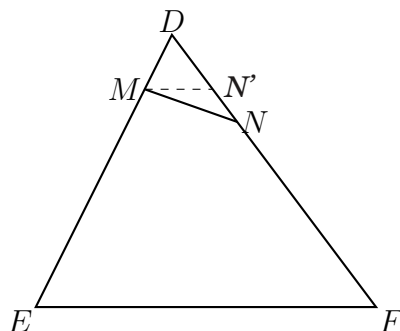
Raportul pe a doua secantă (BD):

$$\frac{OB}{OD} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3} \quad 3$$

$$\frac{OA}{OC} = \frac{OB}{OD} = \frac{2}{3} \xRightarrow{\text{Reciprocă Teoremei lui Thales}} AB \parallel DC$$

Exercițiul 6. Se consideră triunghiul DEF cu laturile $DE = 20$ cm și $DF = 25$ cm. Pe latura DE se fixează punctul M astfel încât $DM = 4$ cm, iar pe latura DF se fixează punctul N astfel încât $DN = 8$ cm.

- (a) Verifică, folosind rapoarte, dacă dreapta MN este paralelă cu latura EF .
 (b) Determină cu câți centimetri (și în ce sens: spre D sau spre F) trebuie deplasat punctul N pe latura DF astfel încât noua dreaptă formată să devină paralelă cu EF .



a)

$$DE = DM + ME \Rightarrow ME = DE - DM \\ ME = 20 - 4 = 16 \text{ cm}$$

$$DF = DN + NF \Rightarrow NF = DF - DN \\ NF = 25 - 8 = 17 \text{ cm}$$

Calculăm rapoartele $\frac{DM}{ME}$ și $\frac{DN}{NF}$

$$\frac{DM}{ME} = \frac{4}{16} = \frac{1}{4} \quad \left. \vphantom{\frac{DM}{ME}} \right\} \Rightarrow MN \nparallel EF$$

$\frac{DN}{NF} = \frac{8}{17}$ } Dreapta MN nu este paralelă cu EF .

b)

Fie $N' \in DF$.

Căutăm poziția corectă N' , astfel încât rapoartele să fie egale.

$$\frac{DM}{ME} = \frac{DN'}{N'F}$$

$$\frac{DM}{DM + ME} = \frac{DN'}{DN' + N'F}$$

$$\frac{DM}{DE} = \frac{DN'}{DF} \Rightarrow \frac{4}{20} = \frac{DN'}{25} \Rightarrow DN' = \frac{4 \cdot 25}{20} = \frac{100}{20} = 5 \text{ cm}$$

Poziția actuală: $DN = 8$ cm

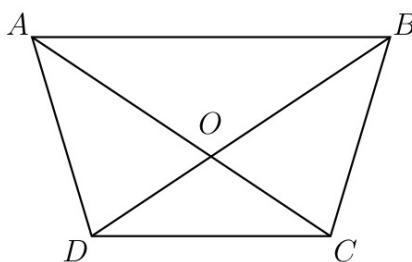
Poziția corectă: $DN' = 5$ cm

Punctul N trebuie mutat 3 cm spre vârful D .

Exercițiul 7. Se consideră patrulaterul convex $ABCD$ în care diagonalele AC și BD se intersectează în punctul O . Lungimile segmentelor determinate pe diagonale sunt date în funcție de un număr real x ($x > 3$):

$$AO = x \text{ cm}, \quad OC = 6 \text{ cm}, \quad BO = 9 \text{ cm}, \quad OD = x - 3 \text{ cm}.$$

- (a) Determină valoarea lui x pentru care dreptele AB și CD sunt paralele.
 (b) Pentru valoarea lui x găsită, demonstrează că patrulaterul $ABCD$ este trapez, dar **nu** este paralelogram.



a)

$$AB \parallel CD \Leftrightarrow \frac{AO}{OC} = \frac{BO}{OD} \Rightarrow \frac{x}{6} = \frac{9}{x-3} \Rightarrow x(x-3) = 6 \cdot 9$$

$$x^2 - 3x = 54$$

$$x^2 - 3x - 54 = 0$$

$$x^2 - 9x + 6x - 54 = 0$$

$$x(x-9) + 6(x-9) = 0$$

$$(x-9)(x+6) = 0$$

$$\left. \begin{array}{l} 1. \ x-9=0 \Rightarrow x=9 \\ 2. \ x+6=0 \Rightarrow x=-6 \end{array} \right\} \begin{array}{l} x > 0 \\ x > 3 \end{array} \Rightarrow x=9$$

b)

$$AO = x = 9 \text{ cm}$$

$$OD = x - 3 = 9 - 3 = 6 \text{ cm}$$

$$\frac{AO}{OC} = \frac{9}{6} = \frac{3}{2}$$

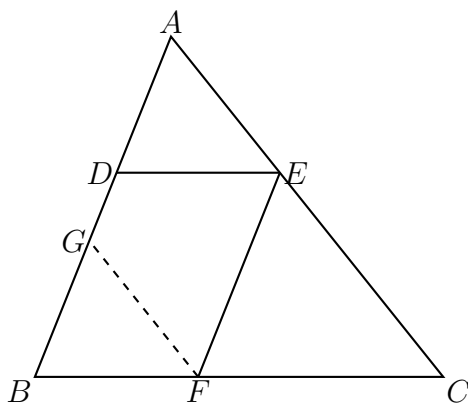
$$\frac{OB}{OD} = \frac{9}{6} = \frac{3}{2}$$

$$\frac{AO}{OC} \neq \frac{OB}{OD} \Rightarrow AD \nparallel BC \Rightarrow$$

$\Rightarrow ABCD$ nu este paralelogram
 $AB \parallel CD \Rightarrow ABCD$ - trapez

Exercițiul 8. În triunghiul ABC , latura AB are lungimea de 30 cm. Se ia punctul D pe latura AB astfel încât $AD = 12$ cm, iar prin D se duce o paralelă la BC , care intersectează AC în punctul E . Prin E se duce o paralelă la AB , care intersectează BC în punctul F și se consideră punctul G pe latura AB astfel încât $BG = 12$ cm.

- (a) Folosind Teorema lui Thales, determină valoarea raportului $\frac{BF}{BC}$.
 (b) Demonstrează că dreapta FG este paralelă cu latura AC .



a)

$$\begin{aligned} \text{În } \triangle ABC: \quad DE \parallel BC & \quad \left\{ \begin{array}{l} \Rightarrow \text{Teorema lui Thales} \end{array} \right. \quad \frac{AE}{EC} = \frac{AD}{DB} \\ \frac{AE}{AE+EC} = \frac{AD}{AD+DB} & \Rightarrow \frac{AE}{AC} = \frac{AD}{AB} = \frac{12}{30} = \frac{2}{5} \end{aligned}$$

$$EF \parallel AB \quad \left\{ \begin{array}{l} \Rightarrow \text{Teorema lui Thales} \end{array} \right. \quad \frac{CF}{FB} = \frac{CE}{EA} \Rightarrow \frac{BF}{FC} = \frac{EA}{CE}$$

$$\frac{BF}{BF+FC} = \frac{EA}{EA+CE}$$

$$\frac{BF}{BC} = \frac{EA}{AC} = \frac{2}{5}$$

b)

$$\frac{BF}{BC} = \frac{2}{5}$$

$$\frac{BF}{BF+FC} = \frac{2}{5}$$

$$\frac{BF}{BF+FC} = \frac{2}{2+3} \Rightarrow \frac{BF}{FC} = \frac{2}{3} \quad (1)$$

$$\frac{BG}{BA} = \frac{12}{30} = \frac{2}{5}$$

$$\frac{BG}{BG+GA} = \frac{2}{5}$$

$$\frac{BG}{BG+GA} = \frac{2}{2+3} \Rightarrow \frac{BG}{GA} = \frac{2}{3} \quad (1)$$

$$\frac{BF}{FC} = \frac{BG}{GA} \Rightarrow FG \parallel AC$$