

Lecția 2 - Unghi înscris în cerc

Clasa a 7-a – Capitolul Geometrie

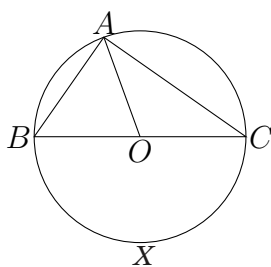
Instrucțiuni

Rezolvă exercițiile folosind proprietățile unghiului înscris, ale unghiului cu vârful pe cerc, în interiorul sau exteriorul acestuia, precum și proprietățile patrulaterului înscritibil. Durata recomandată: **50 de minute**.

Exerciții

Exercițiul 1. Pe un cerc $\mathcal{C}(O, r)$ se consideră punctele A, B, C astfel încât segmentul BC este diametru. Știind că măsura arcului mic $\widehat{AB}$ este de 70° :

- Calculează măsura unghiului înscris $\angle ACB$.
- Determină măsura unghiului $\angle BAC$. Ce fel de triunghi este $\triangle ABC$?



a)

Unghiul $\angle ACB$ este înscris în cerc care subîntinde arcul $\widehat{AB}$.
conform Teoremei unghiului înscris:

$$m(\angle ACB) = \frac{m(\widehat{AB})}{2} = \frac{70^\circ}{2} = 35^\circ$$

b)

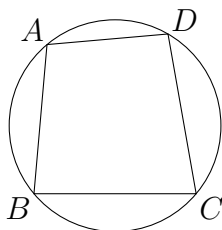
Fie X un punct pe semicerc
 $\angle BAC$ este un unghi înscris care subîntinde arcul $\widehat{BXC}$

Deoarece $BC = \text{diametru}$, arcul subîntins este un semicerc, deci are 180°

$$m(\angle BAC) = \frac{180^\circ}{2} = 90^\circ$$

$\triangle ABC$: $m(\angle BAC) = 90^\circ \Rightarrow \triangle ABC$ - dreptunghi

Exercițiul 2. Patrulaterul $ABCD$ este înscris într-un cerc. Se știe că măsura unghiului $\angle ABC = 105^\circ$ și măsura unghiului $\angle BCD = 80^\circ$. Calculează măsurile unghiurilor $\angle ADC$ și $\angle DAB$.



Într-un patrulater înscris într-un cerc, unghiurile opuse sunt suplementare.

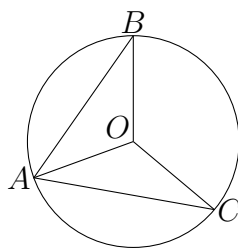
$$\underbrace{m(\sphericalangle ABC)}_{105^\circ} + m(\sphericalangle ADC) = 180^\circ \Rightarrow m(\sphericalangle ADC) = 180^\circ - 105^\circ = 75^\circ$$

$$\underbrace{m(\sphericalangle BCD)}_{80^\circ} + m(\sphericalangle DAB) = 180^\circ$$

$$m(\sphericalangle DAB) = 180^\circ - 80^\circ$$

$$m(\sphericalangle DAB) = 100^\circ$$

Exercițiul 3. Într-un cerc de centru O , unghiurile la centru $\angle AOB$ și $\angle BOC$ sunt adiacente și au măsurile de 110° , respectiv 130° . Calculează măsura unghiului înscris $\angle BAC$ care subîntinde arcul mic BC .



Unghiul $\sphericalangle BAC$ este un unghi înscris în cerc
AB și AC subîntind arcul $\widehat{BC}$.

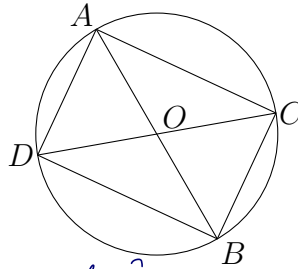
$$m(\widehat{BC}) = m(\sphericalangle BOC) = 130^\circ$$

Măsura unghiului înscris este jumătate din măsura arcului subîntins.

$$m(\sphericalangle BAC) = \frac{m(\widehat{BC})}{2} = \frac{130^\circ}{2} = 65^\circ$$

Exercițiul 4. În cercul $C(O, r)$ se consideră diametrele AB și CD . Știind că măsura unghiului înscris $\angle ACD = 35^\circ$:

- (a) Calculează măsurile arcelor mici $\widehat{AD}$ și $\widehat{BC}$.
 (b) Demonstrează că patrulaterul $ACBD$ este dreptunghi.



a) Unghiul înscris $\angle ACD$ subîntinde arcul $\widehat{AD}$
 $m(\angle ACD) = \frac{m(\widehat{AD})}{2} \Rightarrow m(\widehat{AD}) = 2m(\angle ACD) = 2 \cdot 35 = 70^\circ$
 $AB \cap CD = \{O\}$, AB, CD - diametre $\Rightarrow \angle AOD$ și $\angle BOC$ - opuse la vârf $\Rightarrow$
 $\Rightarrow m(\angle AOD) = m(\angle BOC)$ } $\Rightarrow m(\angle BOC) = 70^\circ$
 $m(\angle AOD) = m(\widehat{AD}) = 70^\circ$
 $m(\widehat{BC}) = m(\angle BOC) = 70^\circ$

b) $ACBD$ - patrulater
 AB, CD - diametre $\Rightarrow AB = CD = 2r$
 $AB \cap CD = \{O\}$ (mijloc) } $\Rightarrow ACBD$ - dreptunghi

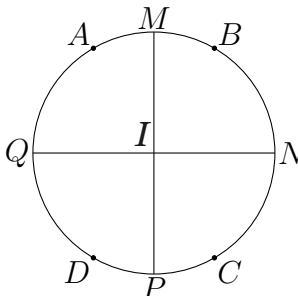
Exercițiul 5. Pe un cerc se consideră, în această ordine, punctele A, B, C, D . Notăm cu M, N, P, Q mijloacele arcelor $\widehat{AB}, \widehat{BC}, \widehat{CD},$ respectiv $\widehat{DA}$. Demonstrează că dreptele MP și NQ sunt perpendiculare.

Fie $l_1 = MP \cap NQ$

$$m(\angle M_1Q) = \frac{m(\widehat{MQ}) + m(\widehat{NP})}{2}$$

$$m(\widehat{MQ}) = m(\widehat{MA}) + m(\widehat{AQ}) \Rightarrow$$

M, Q - mijloace



$$\Rightarrow m(\widehat{MQ}) = \frac{1}{2} m(\widehat{AB}) + \frac{1}{2} m(\widehat{AD})$$

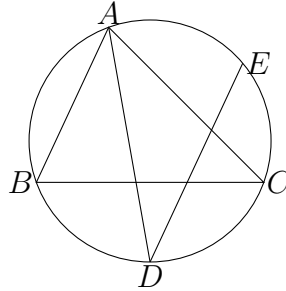
$$m(\widehat{NP}) = m(\widehat{NC}) + m(\widehat{CP}) \Rightarrow m(\widehat{NP}) = \frac{1}{2} m(\widehat{BC}) + \frac{1}{2} m(\widehat{CD})$$

N, P - mijloace

$$2m(\angle M_1Q) = \frac{1}{2} (m(\widehat{AB}) + m(\widehat{AD}) + m(\widehat{BC}) + m(\widehat{CD}))$$

$$2m(\angle M_1Q) = \frac{360^\circ}{2} \Rightarrow 2m(\angle M_1Q) = 180^\circ : 2 \Rightarrow m(\angle M_1Q) = 90^\circ \Rightarrow MP \perp NQ$$

Exercițiul 6. În triunghiul ABC înscris într-un cerc, AD este bisectoarea unghiului $\angle BAC$, cu D situat pe cerc. Prin D se duce o coardă DE paralelă cu AB . Arată că arcele $\widehat{BD}$ și $\widehat{AE}$ sunt congruente.



AD - bisectoarea $\angle BAC \Rightarrow m(\angle BAD) = m(\angle DAC)$

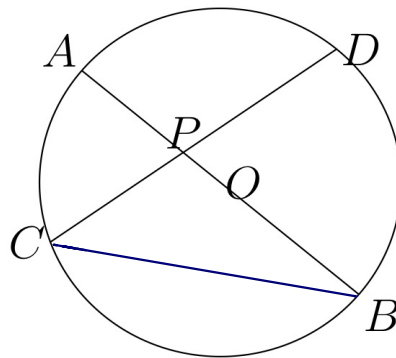
Unghiurile înscrise congruente subîntind arce congruente $\Rightarrow$
 $\Rightarrow \widehat{BD} \equiv \widehat{AE}$

Teorema arcelor cuprinse între coarde paralele spune că arcele dintre paralele sunt congruente.

$DE \parallel AB \Rightarrow \widehat{AD} = \widehat{BE} \Rightarrow ABDE$ - trapez isoscel

Într-un trapez isoscel, laturile opuse sunt congruente $\Rightarrow \widehat{AE} = \widehat{BD}$

Exercițiul 7. În cercul $\mathcal{C}(O, r)$ se consideră coardele AB și CD care se intersectează în punctul P (interior cercului). Știind că punctul O se află în interiorul unghiului $\angle APC$, măsura unghiului $\angle APC = 75^\circ$ și măsura arcului mic $\widehat{AC} = 60^\circ$, determină măsura arcului mic $\widehat{BD}$.



Trasăm coarda BC

Unghiul $\angle ABC$ este unghi înscris în arc care subîntinde arcul $\widehat{AC}$.

Conform teoremei unghiului înscris:

$$m(\angle ABC) = \frac{m(\widehat{AC})}{2} = \frac{60}{2} = 30^\circ$$

$\triangle PCB$:

$\angle APC$ - unghi exterior

Conform teoremei unghiului exterior:

$$m(\angle APC) = m(\angle PBC) + m(\angle BCD)$$

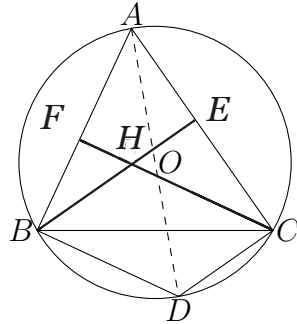
$$m(\angle PBC) = m(\angle ABC) = 30^\circ$$

$$m(\angle BCD) = \underbrace{m(\angle APC)}_{75^\circ} - \underbrace{m(\angle PBC)}_{30^\circ}$$

$$m(\angle BCD) = 75^\circ - 30^\circ = 45^\circ$$

$$m(\angle BCD) = \frac{m(\widehat{BD})}{2} \Rightarrow m(\widehat{BD}) = 2m(\angle BCD) = 2 \cdot 45^\circ = 90^\circ$$

Exercițiul 8. Se consideră triunghiul ascuțitunghic ABC și înălțimile BE, CF ($E \in AC, F \in AB$), iar H este ortocentrul triunghiului. Fie D punctul diametral opus lui A în cercul circumscris triunghiului ABC . Demonstrează că patrulaterul $HBDC$ este paralelogram.



Demonstrăm că $BH \parallel CD$

BE - înălțime, $E \in AC$
 H - ortocentru $\} \Rightarrow BH \perp AC$

$\triangle ACD$:
 AD - diametru $\} \Rightarrow \angle ACD$ înscris subîntinde un semicerc $\Rightarrow$
 $\Rightarrow m(\widehat{AD}) = 180^\circ$

Conform teoremei unghiului înscris:

$$m(\angle ACD) = \frac{m(\widehat{AD})}{2} = \frac{180^\circ}{2} = 90^\circ \Rightarrow DC \perp AC$$

$BH \perp AC$
 $DC \perp AC$ $\} \Rightarrow BH \parallel DC$

Demonstrăm că $CH \parallel BD$

CF - înălțime, $F \in AB$
 H - ortocentru $\} \Rightarrow CH \perp AB$

$\triangle ABD$:
 AD - diametru $\} \Rightarrow \angle ABD$ - unghi înscris într-un semicerc

$$m(\angle ABD) = \frac{m(\widehat{AD})}{2} = \frac{180^\circ}{2} = 90^\circ \Rightarrow BD \perp AB$$

$BD \perp AB$
 $CH \perp AB$ $\} \Rightarrow BD \parallel CH$
 $BH \parallel DC$ $\} \Rightarrow HBDC$ - paralelogram