

Lecția 2 - Teorema înălțimii

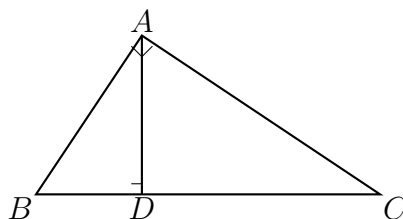
Clasa a 7-a – Capitolul Geometrie

Instrucțiuni

Rezolvă exercițiile folosind Teorema Înălțimii: într-un triunghi dreptunghic, lungimea înălțimii corespunzătoare ipotenuzei este media geometrică a lungimilor proiecțiilor catetelor pe ipotenuză ($h^2 = pr_1 \cdot pr_2$).
Durata recomandată: **50 de minute**.

Exerciții

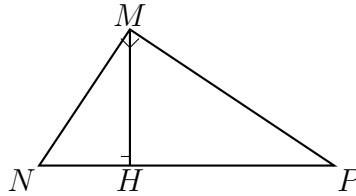
Exercițiul 1. Se consideră triunghiul dreptunghic ABC cu $\angle A = 90^\circ$ și înălțimea $AD \perp BC$, unde $D \in BC$. Lungimile proiecțiilor catetelor pe ipotenuză sunt $BD = 4$ cm și $CD = 9$ cm. Calculează lungimea înălțimii AD .



$$\begin{array}{l} \triangle ABC : \\ m(\angle A) = 90^\circ \\ AD \perp BC, D \in BC \end{array} \left. \begin{array}{l} \text{Teorema} \\ \Rightarrow \\ \text{înălțimii} \end{array} \right\} AD^2 = BD \cdot CD$$

$$\begin{array}{l} AD^2 = BD \cdot CD \\ BD = 4 \text{ cm} \\ CD = 9 \text{ cm} \end{array} \left. \begin{array}{l} \Rightarrow \\ \sqrt{AD^2} = \sqrt{36} \\ AD = 6 \text{ cm} \end{array} \right\}$$

Exercițiul 2. În triunghiul dreptunghic MNP cu $\angle M = 90^\circ$, construim înălțimea $MH \perp NP$, cu $H \in NP$. Știind că $MH = 6$ cm și proiecția $NH = 4$ cm, determină lungimea proiecției HP și lungimea ipotenuzei NP .



$$\Delta MNP: m(\angle M) = 90^\circ \quad \left. \begin{array}{l} \text{Teorema} \\ \text{înălțimii} \end{array} \right\} \Rightarrow MH^2 = NH \cdot HP$$

$$MH \perp NP, H \in NP$$

$$MH^2 = NH \cdot HP \Rightarrow HP = \frac{MH^2}{NH} = \frac{6^2}{4} = \frac{36}{4} = 9 \text{ cm}$$

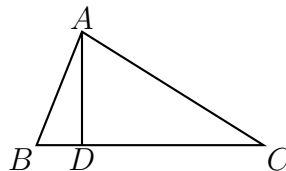
$$NP = NH + HP$$

$$NP = 4 + 9$$

$$NP = 13 \text{ cm}$$

Exercițiul 3. Fie triunghiul dreptunghic ABC cu $\angle A = 90^\circ$ și $AD \perp BC$, $D \in BC$.

Ipotenuza BC are lungimea de 25 cm, iar raportul proiecțiilor catetelor pe ipotenuză este $\frac{BD}{CD} = \frac{1}{4}$. Calculează lungimea înălțimii AD .



$$\Delta ABC: m(\angle A) = 90^\circ \quad \left. \begin{array}{l} \text{Teorema} \\ \text{înălțimii} \end{array} \right\} \Rightarrow AD^2 = BD \cdot DC$$

$$AD \perp BC, D \in BC$$

$$BC = BD + DC$$

$$\frac{BD}{CD} = \frac{1}{4} \Rightarrow CD = 4BD$$

$$BC = BD + 4BD$$

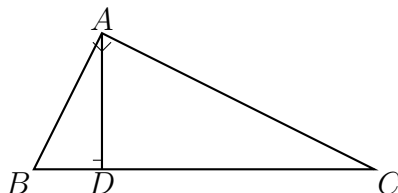
$$BC = 5BD \Rightarrow BD = \frac{BC}{5} = \frac{25}{5} = 5 \text{ cm}$$

$$CD = 4BD = 4 \cdot 5 = 20 \text{ cm}$$

$$\sqrt{AD^2} = \sqrt{BD \cdot DC} \Rightarrow AD = \sqrt{BD \cdot DC} = \sqrt{5 \cdot 20} = \sqrt{100}$$

$$AD = 10 \text{ cm}$$

Exercițiul 4. În triunghiul dreptunghic ABC cu $\angle A = 90^\circ$ și $AD \perp BC$, lungimea proiecției unei catete pe ipotenuză este de 4 ori mai mică decât lungimea proiecției celeilalte catete. Știind că înălțimea $AD = 8$ cm, determină lungimea ipotenuzei BC .



$$\triangle ABC: m(\angle A) = 90^\circ \quad \left. \begin{array}{l} \text{Teorema} \\ \text{înălțimii} \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} AD^2 = BD \cdot DC \\ AD = 8 \text{ cm} \end{array} \quad \left. \begin{array}{l} \Rightarrow BD \cdot DC = 64 \end{array} \right\}$$

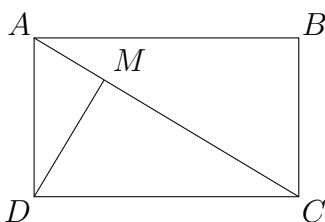
$$pr_{BC}(AB) = BD, \quad pr_{BC}(AC) = DC$$

$$BD = \frac{DC}{4} \Rightarrow DC = 4BD \quad \left. \begin{array}{l} \Rightarrow BD \cdot 4BD = 64 \\ BD \cdot DC = 64 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} 4BD^2 = 64 \quad | :4 \Rightarrow \sqrt{BD^2} = \sqrt{16} \Rightarrow BD = 4 \text{ cm} \end{array}$$

$$BD = 4 \text{ cm} \Rightarrow DC = 4 \cdot 4 = 16 \text{ cm}$$

$$BC = BD + DC = 4 + 16 = 20 \text{ cm}$$

Exercițiul 5. Fie dreptunghiul $ABCD$. Din vârful D se duce o perpendiculară pe diagonala AC , care o intersectează în punctul M . Știind că $AM = 3,6$ cm și $MC = 6,4$ cm, calculează lungimea segmentului DM și aria triunghiului ADC .



$$\triangle ADC: m(\angle D) = 90^\circ \quad \left. \begin{array}{l} \text{Teorema} \\ \text{înălțimii} \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \sqrt{DM^2} = \sqrt{AM \cdot MC} \\ DM = \sqrt{AM \cdot MC} \end{array}$$

$$DM = \sqrt{3,6 \cdot 6,4} = \sqrt{\frac{36}{10} \cdot \frac{64}{10}}$$

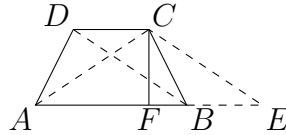
$$DM = \sqrt{\frac{2304}{100}} = \frac{48}{10} = 4,8 \text{ cm}$$

$$A_{\triangle ADC} = \frac{AC \cdot DM}{2}$$

$$AC = AM + MC = 3,6 + 6,4 = 10 \text{ cm}$$

$$A_{\triangle ADC} = \frac{10 \cdot 4,8}{2} = 24 \text{ cm}^2$$

Exercițiul 6. Se consideră trapezul isoscel $ABCD$ cu $AB \parallel CD$ și diagonalele perpendiculare $AC \perp BD$. Construim $CE \parallel BD$ cu E pe dreapta AB . Știind că în triunghiul dreptunghic ACE , înălțimea din C determină pe ipotenuză segmente de 4 cm și 16 cm, aflați înălțimea trapezului.



$CF \perp AB$, $F \in AB$, $CF = h_{\text{trapez}}$ (înălțimea trapezului)

$$\left. \begin{array}{l} AC \perp BD \\ BD \parallel CE \end{array} \right\} \Rightarrow AC \perp CE \Rightarrow m(\angle ACE) = 90^\circ$$

$$\left. \begin{array}{l} CF \perp AB \\ E \in AB \end{array} \right\} \Rightarrow CF \perp AE$$

$$\Delta ACE: \left. \begin{array}{l} m(\angle C) = 90^\circ \\ CF \perp AE \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Teorema} \\ \Rightarrow \\ \text{înălțimii} \end{array} \quad CF^2 = AF \cdot FE$$

$$CF = \sqrt{AF \cdot FE}$$

$$AF = 4 \text{ cm}$$

$$FE = 16 \text{ cm}$$

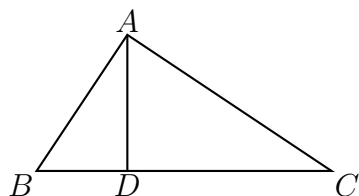
$$CF = \sqrt{4 \cdot 16}$$

$$CF = \sqrt{64}$$

$$CF = 8 \text{ cm}$$

Deci, înălțimea trapezului este de 8 cm

Exercițiul 7. În triunghiul ABC , $AD \perp BC$ cu $D \in BC$. Se știe că $AD = 6$ cm, $BD = 4$ cm și $CD = 9$ cm. Folosind Reciproca Teoremei Înălțimii, verifică dacă triunghiul ABC este dreptunghic în A .



Dacă într-un triunghi pătratul lungimii unei înălțimi este egal cu produsul lungimilor segmentelor determinate de ea pe latura opusă, atunci triunghiul este dreptunghic.

$$AD^2 = BD \cdot DC$$

$$AD = 6 \text{ cm}$$

$$BD = 4 \text{ cm}$$

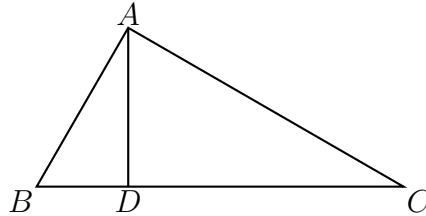
$$CD = 9 \text{ cm}$$

$$\left. \begin{array}{l} 6^2 = 4 \cdot 9 \\ 36 = 4 \cdot 9 \end{array} \right\} \Rightarrow AD^2 = BD \cdot DC$$

$$\Delta ABC: \left. \begin{array}{l} AD \perp BC, D \in BC \\ AD^2 = BD \cdot DC \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Reciproca} \\ \text{Teoremei} \\ \text{înălțimii} \end{array} \Rightarrow m(\angle A) = 90^\circ$$

$$\Delta ABC: \left. \begin{array}{l} m(\angle A) = 90^\circ \end{array} \right\} \Rightarrow \Delta ABC - \text{dreptunghic în } A$$

Exercițiul 8. În triunghiul ABC cu $\angle A = 90^\circ$ și $AD \perp BC$, se știe că raportul pătratelor catetelor este $\frac{AB^2}{AC^2} = \frac{1}{3}$. Dacă înălțimea $AD = 3\sqrt{3}$ cm, calculează lungimea ipotenuzei BC .



$$AD \perp BC, D \in BC \Rightarrow m(\angle ADB) = m(\angle ADC) = 90^\circ$$

$$\begin{aligned} \triangle ABC: \quad m(\angle A) + m(\angle B) + m(\angle C) &= 180^\circ \\ \underbrace{m(\angle A)}_{90^\circ} + m(\angle B) + m(\angle C) &= 180^\circ \\ m(\angle B) + m(\angle C) &= 90^\circ \\ m(\angle ACB) &= 90^\circ - m(\angle ABC) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \triangle ABD: \quad m(\angle A) + m(\angle B) + m(\angle D) &= 180^\circ \\ m(\angle BAD) + m(\angle ABD) &= 90^\circ \Rightarrow m(\angle ABD) = 90^\circ - m(\angle BAD) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} m(\angle ABD) = m(\angle ABC) &\Rightarrow m(\angle ACB) = 90^\circ - 90^\circ + m(\angle BAD) \\ m(\angle ACB) &= m(\angle BAD) \end{aligned}$$

considerăm $\triangle ABD$ și $\triangle CAD$

$$\begin{aligned} \angle ADC &\equiv \angle BDA \quad (\text{unghiuri drepte}) \\ \angle BAD &\equiv \angle ACB \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \text{u.u.} \\ \text{u.u.} \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle ABD \sim \triangle CAD \Rightarrow \frac{AB}{CA} = \frac{BD}{AD} = \frac{AD}{CD}$$

$$\begin{aligned} \frac{BD}{AD} &= \frac{AB}{CA} \\ \frac{AB^2}{CA^2} &= \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{AB}{CA} = \frac{1}{\sqrt{3}} \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{BD}{AD} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\begin{aligned} AD &= \sqrt{3} \cdot BD \\ AD &= 3\sqrt{3} \text{ cm} \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} \Rightarrow BD = \frac{AD}{\sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = 3 \text{ cm}$$

$$\begin{aligned} \triangle ABC: \quad m(\angle A) &= 90^\circ \\ AD &\perp BC, D \in BC \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \text{Teorema} \\ \text{înmălturii} \end{array} \right\} \Rightarrow AD^2 = BD \cdot DC \Rightarrow DC = \frac{AD^2}{BD} = \frac{27}{3} = 9 \text{ cm}$$

$$BC = BD + DC = 3 + 9 = 12 \text{ cm}$$