



Fișă de lucru

Lecția 2 - Ecuația de gradul I cu două necunoscute

Clasa a 8-a – Capitolul 2 - Ecuații, inecuații și sisteme de ecuații

Instrucțiuni

Încearcă să rezolvi toate exercițiile fără ajutor. Durata recomandată:
30–40 de minute.

Exerciții

Exercițiul 1. Verifică dacă perechile de numere date sunt soluții ale ecuației $3x - 2y + 7 = 0$:

- (a) $(-1, 2)$
- (b) $(1, 5)$
- (c) $(3, 8)$
- (d) $(-4, -2)$

Exercițiul 2. Aduceți la forma $ax + by + c = 0$, identificați a, b, c și determinați intersecțiile cu axele (A pe Ox , B pe Oy):

- (a) $y = 2x - 5$
- (b) $3x = 4 - 2y$
- (c) $5(x - 1) - 3(y + 2) = 7$

Exercițiul 3. Pentru ecuația $4x + 6y - 18 = 0$:

- (a) Exprimați mulțimea soluțiilor sub forma $S = \{(x, y) \mid y = mx + n, x \in R\}$.
- (b) Dați **trei** exemple de soluții **întregi diferite**.

Exercițiul 4. Găsiți punctele de intersecție ale dreptelor, rezolvând sistemele:

$$(a) \begin{cases} 2x - y = 5 \\ x + 3y = 1 \end{cases}$$

$$(b) \begin{cases} 3x + 2y = 7 \\ 5x - y = 4 \end{cases}$$

Exercițiul 5. Stabiliți relația dintre perechile de drepte: *paralele*, *coincidente* sau *perpendiculare*. Justificați pe baza coeficienților/sau pantei:

$$(a) 4x - 6y + 9 = 0 \quad \text{și} \quad 2x - 3y + 1 = 0$$

$$(b) -8x + 12y - 18 = 0 \quad \text{și} \quad 4x - 6y + 9 = 0$$

$$(c) 3x - 4y + 5 = 0 \quad \text{și} \quad 4x + 3y - 7 = 0$$

Exercițiul 6. Determinați ecuația dreptei care trece prin punctele date, în forma $ax + by + c = 0$ (cu a, b, c întregi, fără fracții):

$$(a) A(-2, 3) \text{ și } B(4, 1)$$

$$(b) C(0, -5) \text{ și } D(3, 0)$$

Exercițiul 7. Soluții naturale pentru ecuații liniare (dați toate perechile cerute):

$$(a) 7x + 5y = 100, \text{ cu } x, y \in N.$$

$$(b) 4x + 9y = 60, \text{ cu } x, y \in N \text{ și } x \leq 10.$$

Exercițiul 8. Considerați sistemul $\begin{cases} kx - 2y = 6 \\ 3x - 2y = 9 \end{cases}$, unde $k \in R$. Stabiliți:

(a) pentru ce valori ale lui k sistemul are **o soluție unică**;

(b) pentru ce valori ale lui k sistemul **nu are soluții**;

(c) dacă există vreo valoare a lui k pentru care sistemul are **infinit de soluții**. Argumentați.

Succes!

Exercițiul 1. Verifică dacă perechile de numere date sunt soluții ale ecuației $3x - 2y + 7 = 0$:

a) $(-1, 2)$
↓ ↓
x y

$$\Rightarrow 3x - 2y + 7 = 3 \cdot (-1) - 2 \cdot 2 + 7 = -3 - 4 + 7 = -7 + 7 = 0 \quad (A)$$

b) $(1, 5)$
↓ ↓
x y

$$\Rightarrow 3x - 2y + 7 = 3 \cdot 1 - 2 \cdot 5 + 7 = 3 - 10 + 7 = -7 + 7 = 0 \quad (A)$$

c) $(3, 8)$
↓ ↓
x y

$$\Rightarrow 3x - 2y + 7 = 3 \cdot 3 - 2 \cdot 8 + 7 = 9 - 16 + 7 = -7 + 7 = 0 \quad (A)$$

d) $(-4, -2)$

$$\Rightarrow 3x - 2y + 7 = 3 \cdot (-4) - 2 \cdot (-2) + 7 = -12 + 4 + 7 = 8 + 7 = 15 \quad (F)$$

Exercițiul 2. Aduceți la forma $ax + by + c = 0$, identificați a, b, c și determinați intersecțiile cu axele (A pe Ox , B pe Oy):

a) $y = 2x - 5 \Rightarrow y - 2x + 5 = 0 \Rightarrow -2x + y + 5 = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = -2 \\ b = 1 \\ c = 5 \end{cases}$

Intersecția cu $Ox (y=0)$: $-2 \cdot x + 0 + 5 = 0$

$$-2x + 5 = 0 \quad | -5$$

$$-2x = -5 \quad | :(-2)$$

$$x = \frac{5}{2} \Rightarrow A\left(\frac{5}{2}, 0\right)$$

Intersecția cu $Oy (x=0)$: $-2 \cdot 0 + y + 5 = 0$

$$0 + y + 5 = 0 \quad | -5$$

$$y = -5 \Rightarrow B(0, -5)$$

b) $3x = 4 - 2y \Rightarrow 3x + 2y - 4 = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = 2 \\ c = -4 \end{cases}$

Intersecția cu $Ox (y=0)$: $3 \cdot x + 2 \cdot 0 - 4 = 0$

$$3x - 4 = 0 \Rightarrow 3x = 4 \quad | :3 \Rightarrow x = \frac{4}{3} \Rightarrow A\left(\frac{4}{3}, 0\right)$$

Intersecția cu Oy ($x=0$): $3 \cdot 0 + 2y - 4 = 0$

$$\Rightarrow 2y - 4 = 0 \quad | +4$$

$$2y = 4 \quad | :2 \Rightarrow y = 2 \Rightarrow B(0, 2)$$

c) $5(x-1) - 3(y+2) = 7$

$$5x - 5 \cdot 1 - 3y - 3 \cdot 2 = 7$$

$$5x - 5 - 3y - 6 = 7 \Rightarrow 5x - 3y - 5 - 6 - 7 = 0$$

$$\Rightarrow 5x - 3y - 18 = 0 \Rightarrow \begin{cases} a=5 \\ b=-3 \\ c=-18 \end{cases}$$

Intersecția cu Ox ($y=0$): $5x - 3 \cdot 0 - 18 = 0$

$$5x - 18 = 0 \quad | +18$$

$$5x = 18 \quad | :5 \Rightarrow x = \frac{18}{5} \Rightarrow A\left(\frac{18}{5}, 0\right)$$

Intersecția cu Oy ($x=0$): $5 \cdot 0 - 3y - 18 = 0$

$$\Rightarrow -3y - 18 = 0 \quad | +18$$

$$-3y = 18 \quad | :(-3)$$

$$y = -6 \Rightarrow B(0, -6)$$

Exercițiul 3. Pentru ecuația $4x + 6y - 18 = 0$:

(a) Exprimați mulțimea soluțiilor sub forma $S = \{(x, y) \mid y = mx + n, x \in \mathbb{R}\}$.

(b) Dați **trei** exemple de soluții **întregi diferite**.

$$a) 4x + 6y - 18 = 0 \quad | :2 \Rightarrow 2x + 3y - 9 = 0 \quad \Rightarrow 3y = -2x + 9 \quad | :3$$

$$y = -\frac{2}{3}x + 3$$

$$\Rightarrow S = \{(x, y) \mid y = -\frac{2}{3}x + 3, x \in \mathbb{R}\}$$

b) Pentru a obține valori întregi, va trebui să luăm valori ale lui x pentru care se împarte cu 3 (deoarece observăm coeficientul $-\frac{2}{3}$)

1. $x = 0 \Rightarrow y = -\frac{2}{3} \cdot 0 + 3 = 0 + 3 = 3 \Rightarrow \text{Soluția } (0, 3)$

2. $x = 3 \Rightarrow y = -\frac{2}{3} \cdot 3 + 3 = -2 + 3 = 1 \Rightarrow \text{Soluția } (3, 1)$

3. $x = -3 \Rightarrow y = -\frac{2}{3} \cdot (-3) + 3 = 2 + 3 = 5 \Rightarrow \text{Soluția } (-3, 5)$

Exercițiul 4. Găsiți punctele de intersecție ale dreptelor, rezolvând sistemele:

$$a) \begin{cases} 2x - y = 5 \\ x + 3y = 1 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} 6x - 3y = 15 \\ x + 3y = 1 \end{cases} \quad (+)$$
$$\frac{7x}{7} = \frac{16}{7} \quad | : 7 \Rightarrow x = \frac{16}{7}$$

$$x + 3y = 1 \Rightarrow \frac{16}{7} + 3y = 1 \quad | - \frac{16}{7} \Rightarrow 3y = 1 - \frac{16}{7} = \frac{7-16}{7} = \frac{-9}{7}$$

$$3y = -\frac{9}{7} \quad | : 3 \Rightarrow y = -\frac{3}{7}$$

$\Rightarrow$ Punctul de intersecție: $(\frac{16}{7}, -\frac{3}{7})$

$$b) \begin{cases} 3x + 2y = 7 \\ 5x - y = 4 \end{cases} \quad \Rightarrow \begin{cases} 3x + 2y = 7 \\ 10x - 2y = 8 \end{cases} \quad (+)$$
$$\frac{13x}{13} = \frac{15}{13} \quad | : 13 \Rightarrow x = \frac{15}{13}$$

$$3x + 2y = 7 \Rightarrow 3 \cdot \frac{15}{13} + 2y = 7 \Rightarrow \frac{45}{13} + 2y = 7 \quad | - \frac{45}{13} \Rightarrow 2y = 7 - \frac{45}{13}$$

$$2y = \frac{91-45}{13} = \frac{46}{13} \quad | : 2 \Rightarrow y = \frac{23}{13}$$

Punctul de intersecție: $(\frac{15}{13}, \frac{23}{13})$

Exercițiul 5. Stabiliți relația dintre perechile de drepte: *paralele, coincidente sau perpendiculare*. Justificați pe baza coeficienților/sau pantei:

Pași de rezolvare:

- calculăm pantele celor două drepte: $m = -\frac{a}{b}$

- vedem ce relație se formează între cele 2 pante:

1) Dacă sunt egale și coeficienții lui x și y sunt proporționali cu termenii liberi, atunci dreptele sunt coincidente.

2) Dacă sunt egale și coeficienții lui x și y nu sunt proporționali cu termenii liberi, atunci dreptele sunt paralele.

3) Dacă înmulțite dau -1 , dreptele sunt perpendiculare.

a) $4x - 6y + 9 = 0$

$$m_1 = -\frac{a_1}{b_1} = -\frac{4}{-6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

$$2x - 3y + 1 = 0$$

$$m_2 = -\frac{a_2}{b_2} = -\frac{2}{-3} = \frac{2}{3}$$

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{4}{2} = 2$$

$$\frac{b_1}{b_2} = \frac{-6}{-3} = 2$$

$$\frac{c_1}{c_2} = \frac{9}{1} = 9$$

$$\Rightarrow \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$$

$$\text{dar } m_1 = m_2$$

$\Rightarrow$ drepte paralele

b) $4x - 6y + 9 = 0$

$$m_1 = -\frac{a_1}{b_1} = -\frac{4}{-6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

$$-8x + 12y - 18 = 0$$

$$m_2 = -\frac{a_2}{b_2} = -\frac{-8}{12} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow m_1 = m_2$$

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{4}{-8} = -\frac{1}{2}$$

$$\frac{b_1}{b_2} = \frac{-6}{12} = -\frac{1}{2}$$

$$\frac{c_1}{c_2} = \frac{9}{-18} = -\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$$

$\Rightarrow$ drepte coincidente

$$c) 3x - 4y + 5 = 0$$

$$4x + 3y - 7 = 0$$

$$m_1 = -\frac{a_1}{b_1} = -\frac{3}{-4} = \frac{3}{4}$$

$$m_2 = -\frac{a_2}{b_2} = -\frac{4}{3}$$

$$m_1 \cdot m_2 = \frac{3}{4} \cdot \left(-\frac{4}{3}\right) = -1 \Rightarrow \text{drepte perpendiculare}$$

Exercițiul 6. Determinați ecuația dreptei care trece prin punctele date, în forma $ax + by + c = 0$ (cu a, b, c întregi, fără fracții):

a) A(-2, 3) B(4, 1)
 $x \swarrow \searrow y \quad x \swarrow \searrow y$

folosind ecuația dreptei $y = mx + m$, rezultă sistemul:

$$\begin{cases} 3 = -2 \cdot m + m \\ 1 = 4 \cdot m + m \cdot (-1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3 = -2m + m \\ -1 = -4m - m \end{cases} \begin{matrix} \\ (+) \end{matrix} \Rightarrow \frac{2}{-6} = -\frac{1}{3}$$

$$3 = -2 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) + m \Rightarrow 3 = \frac{2}{3} + m \mid -\frac{2}{3} \Rightarrow m = 3 - \frac{2}{3} = \frac{9-2}{3} \Rightarrow m = \frac{7}{3}$$

$$\Rightarrow \text{Ecuația dreptei este: } y = -\frac{1}{3} \cdot x + \frac{7}{3} \mid \cdot 3 \Rightarrow 3y = -x + 7 \Rightarrow x + 3y - 7 = 0$$

b) C(0, -5) D(3, 0)
 $x \swarrow \searrow y \quad x \swarrow \searrow y \quad y = mx + m$

$$\Rightarrow \begin{cases} -5 = m \cdot 0 + m \\ 0 = 3 \cdot m + m \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -5 = m \\ 0 = 3m + m \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} \\ 3m - 5 = 0 \mid +5 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ 3m = 5 \mid :3 \end{matrix} \Rightarrow m = \frac{5}{3}$$

$$\text{Ecuația dreptei este: } y = \frac{5}{3}x - 5 \mid \cdot 3 \Rightarrow 3y = 5x - 15 \Rightarrow 5x - 3y - 15 = 0$$

Exercițiul 7. Soluții naturale pentru ecuații liniare (dați toate perechile cerute):

a) $7x + 5y = 100$; $x, y \in \mathbb{N}$

$$\left. \begin{array}{l} 5y : 5 \\ 100 : 5 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 7x : 5 \\ 7 \nmid 5 \end{array} \right\} \Rightarrow x : 5 \Rightarrow x \in M_5$$

$$x=0 \Rightarrow 7 \cdot 0 + 5y = 100 \Rightarrow 5y = 100 \mid : 5 \Rightarrow y = 20$$

$$x=5 \Rightarrow 35 + 5y = 100 \mid -35 \Rightarrow 5y = 65 \mid : 5 \Rightarrow y = 13$$

$$x=10 \Rightarrow 70 + 5y = 100 \mid -70 \Rightarrow 5y = 30 \mid : 5 \Rightarrow y = 6$$

$$\left. \begin{array}{l} x=15 \Rightarrow 105 + 5y = 100 \\ y \in \mathbb{N} \end{array} \right\} \Rightarrow \text{imposibil}$$

$$\Rightarrow S = \{(0, 20); (5, 13); (10, 6)\}$$

b) $4x + 9y = 60$; $x, y \in \mathbb{N}$; $x \leq 10$

$$\left. \begin{array}{l} 9y : 3 \\ 60 : 3 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 4x : 3 \\ 4 \nmid 3 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x : 3 \\ x \leq 10 \end{array} \right\} \Rightarrow x \text{ poate fi } \{0, 3, 6, 9\}$$

$$x=0 \Rightarrow 0 + 9y = 60 \Rightarrow 9y = 60 \mid : 9 \Rightarrow y = \frac{60}{9} = \frac{20}{3} \notin \mathbb{N}$$

$$x=3 \Rightarrow 12 + 9y = 60 \Rightarrow 9y = 60 - 12 \Rightarrow 9y = 48 \mid : 9 \Rightarrow y = \frac{48}{9} = \frac{16}{3} \notin \mathbb{N}$$

$$x=6 \Rightarrow 24 + 9y = 60 \mid -24 \Rightarrow 9y = 36 \mid : 9 \Rightarrow y = 4$$

$$x=9 \Rightarrow 36 + 9y = 60 \mid -36 \Rightarrow 9y = 24 \mid : 9 \Rightarrow y = \frac{24}{9} = \frac{8}{3} \notin \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow S = \{(6, 4)\}$$

Exercițiul 8. Considerați sistemul $\begin{cases} kx - 2y = 6 \\ 3x - 2y = 9 \end{cases}$, unde $k \in \mathbb{R}$. Stabiliți:

- (a) pentru ce valori ale lui k sistemul are **o soluție unică**;
- (b) pentru ce valori ale lui k sistemul **nu are soluții**;
- (c) dacă există vreo valoare a lui k pentru care sistemul are **infinit de soluții**.
Argumentați.

$$\begin{cases} kx - 2y = 6 \\ 3x - 2y = 9 \end{cases} \quad \begin{matrix} \cdot (-1) \\ \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} kx - 2y = 6 \\ -3x + 2y = -9 \end{cases} \quad (+)$$
$$\frac{kx - 3x}{kx - 3x} = \frac{6 - (-9)}{-3} \Rightarrow x(k-3) = -3 \quad | : (k-3)$$
$$x = \frac{3}{k-3}$$

a) Soluție unică: Pentru a-l putea calcula pe x , $k-3 \neq 0 \quad | +3$
 $k \neq 3 \Rightarrow k \in \mathbb{R} \setminus \{3\}$

b) Nicio soluție: Sistemul este imposibil pentru $k=3$, deoarece
nu am putea efectua împărțirea.

c) Tocmai ce am arătat la subpunctele anterioare că sistemul
nu poate avea soluție unică pentru $k \neq 3$ și nicio soluție pentru
 $k=3$. Nu mai rămân valori ale lui k disponibile pentru ca sistemul
să aibă o infinitate de soluții.