

Lecția 2 - Cubul

Clasa a 8-a – Capitolul 2 – Aree și volume ale unor corpuri geometrice

Instrucțiuni

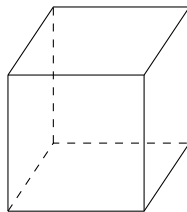
Rezolvă exercițiile folosind formulele cubului și teoremele de perpendicularitate în spațiu.

Formule: $A_l = 4l^2$, $A_t = 6l^2$, $V = l^3$, $d_{fata} = l\sqrt{2}$, $d_{cub} = l\sqrt{3}$. Durata recomandată: **50 minute**.

Exerciții

Exercițiul 1. Un cub are muchia de 6 cm. Calculați:

- (a) Lungimea diagonalei unei fețe și lungimea diagonalei cubului.
- (b) Aria totală și volumul cubului.



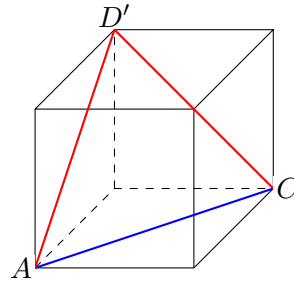
Exercițiul 2. Volumul unui cub este egal cu 64 cm^3 . Determinați aria laterală a cubului și suma tuturor muchiilor sale.

Exercițiul 3. Diagonala unui cub are lungimea de $5\sqrt{3} \text{ cm}$. Calculați aria totală a cubului.

Exercițiul 4. Fie cubul $ABCD A' B' C' D'$ cu muchia de 10 cm.

- (a) Calculați distanța de la punctul A' la dreapta BC .
- (b) Calculați distanța de la punctul A' la dreapta CD .

Exercițiul 5. În cubul $ABCD A' B' C' D'$ cu muchia de 8 cm, se consideră diagonala AC a bazei și vârful D' . Calculați distanța de la vârful D' la dreapta AC .



Exercițiul 6. Fie cubul $ABCD A' B' C' D'$. Măsura unghiului format de diagonala BD' cu planul bazei (ABC) se notează cu α . Calculați $\sin(\alpha)$ și $\cos(\alpha)$.

Exercițiul 7. Un cub de metal cu muchia de 10 cm se topește și din materialul rezultat se toarnă 8 cuburi mici, identice.

- (a) Determinați muchia unui cub mic.
- (b) Cu cât la sută este mai mare aria totală a celor 8 cuburi mici împreună față de aria totală a cubului inițial?

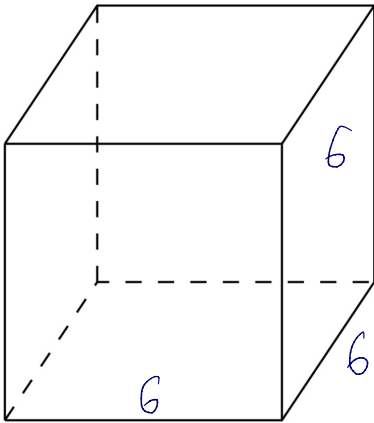
Exercițiul 8. Se consideră cubul $ABCD A' B' C' D'$ cu muchia $AB = 6$ cm.

- (a) Calculați aria triunghiului $A'BD$.
- (b) Calculați distanța de la vârful C la planul $(A'BD)$.

Succes!

Exercițiul 1. Un cub are muchia de 6 cm. Calculați:

- (a) Lungimea diagonalei unei fețe și lungimea diagonalei cubului.
- (b) Aria totală și volumul cubului.



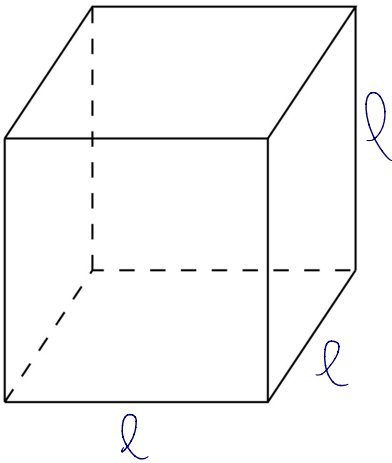
$$a) d_{\text{pătrat}} = l\sqrt{2} = 6\sqrt{2} \text{ cm}$$

$$d_{\text{cub}} = l\sqrt{3} = 6\sqrt{3} \text{ cm}$$

$$b) A_t = 6l^2 = 6 \cdot 6^2 = 6 \cdot 36 = 216 \text{ cm}^2$$

$$V = l^3 = 6^3 = 216 \text{ cm}^3$$

Exercițiul 2. Volumul unui cub este egal cu 64 cm^3 . Determinați aria laterală a cubului și suma tuturor muchiilor sale.

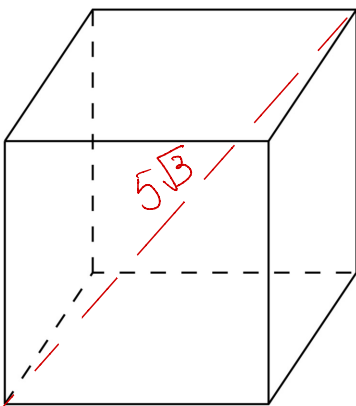


$$\left. \begin{array}{l} V = l^3 \\ V = 64 \end{array} \right\} \Rightarrow l^3 = 64 \Rightarrow l = 4 \text{ cm}$$

$$A_l = 4l^2 = 4 \cdot 4^2 = 4^3 = 64 \text{ cm}^2$$

$$\text{Suma muchiilor} = l \cdot 12 = 4 \cdot 12 = 48 \text{ cm}$$

Exercițiul 3. Diagonala unui cub are lungimea de $5\sqrt{3} \text{ cm}$. Calculați aria totală a cubului.



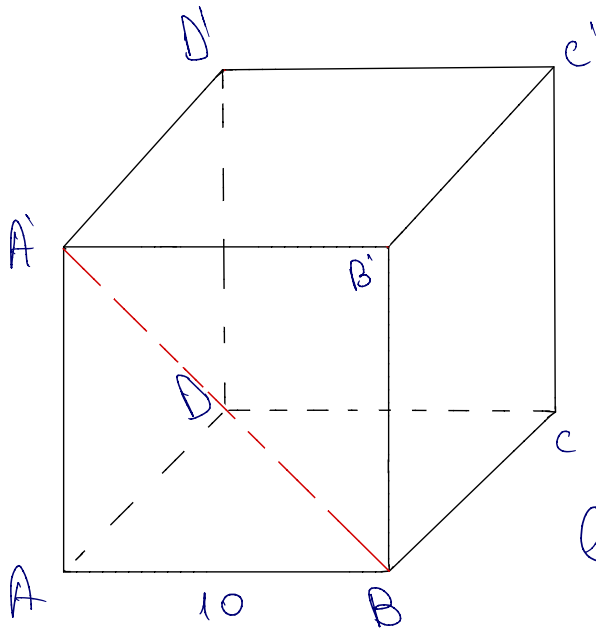
$$\left. \begin{array}{l} d_{\text{cub}} = l\sqrt{3} \\ d_{\text{cub}} = 5\sqrt{3} \end{array} \right\} \Rightarrow l = 5 \text{ cm}$$

$$A_t = 6l^2 = 6 \cdot 5^2 = 6 \cdot 25 = 150 \text{ cm}^2$$

Exercițiul 4. Fie cubul $ABCD A' B' C' D'$ cu muchia de 10 cm.

(a) Calculați distanța de la punctul A' la dreapta BC .

(b) Calculați distanța de la punctul A' la dreapta CD .



$$\left. \begin{array}{l} a) A'A \perp (ABCD) \\ BC \subset (ABCD) \\ AB \perp BC \end{array} \right\} \begin{array}{l} T_3 \perp \\ \Rightarrow A'B \perp BC \end{array}$$

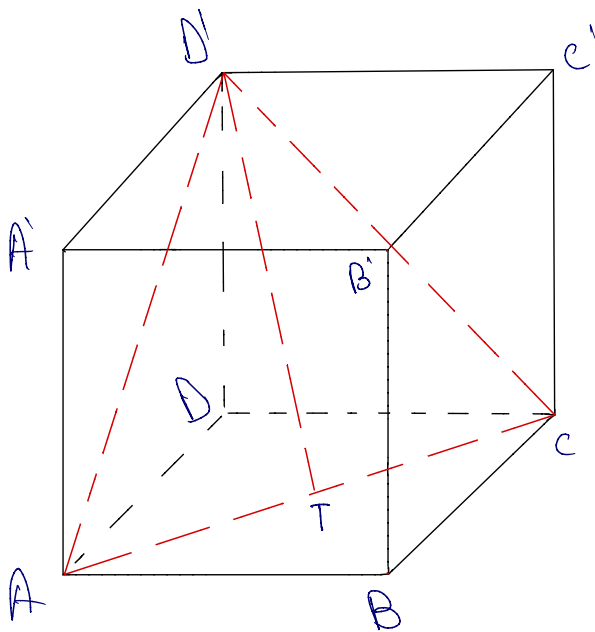
$$\Rightarrow d(A', BC) = A'B$$

$$A'B = d_{\text{pătrat}} = l\sqrt{2} = 10\sqrt{2} \text{ cm}$$

$$\left. \begin{array}{l} b) A'A \perp (ABCD) \\ CD \subset (ABCD) \\ AD \perp DC \end{array} \right\} \begin{array}{l} T_3 \perp \\ \Rightarrow A'D \perp DC \end{array}$$

$$\Rightarrow d(A', CD) = A'D; \quad A'D = d_{\text{pătrat}} = l\sqrt{2} = 10\sqrt{2} \text{ cm}$$

Exercițiul 5. În cubul $ABCD A' B' C' D'$ cu muchia de 8 cm, se consideră diagonala AC a bazei și vârful D' . Calculați distanța de la vârful D' la dreapta AC .



Unim punctele D', A și C .

$$\left. \begin{array}{l} D'A = d_{\text{pătrat}} = l\sqrt{2} = 8\sqrt{2} \text{ cm} \\ D'C = d_{\text{pătrat}} = l\sqrt{2} = 8\sqrt{2} \text{ cm} \\ AC = d_{\text{pătrat}} = l\sqrt{2} = 8\sqrt{2} \text{ cm} \end{array} \right\} \Rightarrow$$

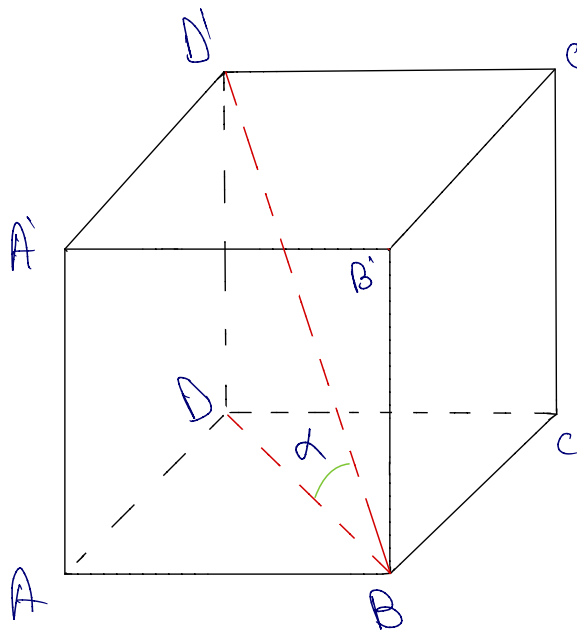
$$\Rightarrow D'A = D'C = AC \Rightarrow \triangle D'AC \text{ echilateral}$$

Fie $D'T \perp AC, T \in AC$.

$$D'T \text{ înălțime în } \triangle D'AC \text{ echilateral} \Rightarrow D'T = \frac{d_{\text{pătrat}} \cdot \sqrt{3}}{2}$$

$$D'T = \frac{4 \cdot 8\sqrt{2} \cdot \sqrt{3}}{2 \cdot 1} \Rightarrow D'T = 4\sqrt{6} \text{ cm}$$

Exercițiul 6. Fie cubul $ABCD A' B' C' D'$. Măsura unghiului format de diagonala BD' cu planul bazei (ABC) se notează cu α . Calculați $\sin(\alpha)$ și $\cos(\alpha)$.



$$\left. \begin{array}{l} D'D \perp (ABCD) \Rightarrow p_{(ABCD)} D' = D \\ B \in (ABCD) \Rightarrow p_{(ABCD)} B = B \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow p_{(ABCD)} D'B = DB$$

$$\Rightarrow \angle(D'B, (ABCD)) = \angle(D'B, DB) = \angle D'BD$$

$$\left. \begin{array}{l} D'D \perp (ABCD) \\ DB \subset (ABCD) \end{array} \right\} \Rightarrow D'D \perp DB$$

$$\Rightarrow \triangle D'DB \text{ dreptunghic: } \sin \alpha = \frac{D'D}{D'B} = \frac{2}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\cos \alpha = \frac{DB}{D'B} = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

Exercițiul 7. Un cub de metal cu muchia de 10 cm se topește și din materialul rezultat se toarnă 8 cuburi mici, identice.

(a) Determinați muchia unui cub mic.

(b) Cu cât la sută este mai mare aria totală a celor 8 cuburi mici împreună față de aria totală a cubului inițial?

$$a) V_{\text{cub mare}} = L^3 = 10^3 = 1000 \text{ cm}^3$$

$$V_{\text{cub mic}} = V_{\text{cub mare}} : 8 = 1000 : 8 = 125 \text{ cm}^3$$

$$V_{\text{cub mic}} = l^3 \Rightarrow l^3 = 125 \text{ cm}^3 \Rightarrow l = 5 \text{ cm}$$

$$b) A_{t \text{ mare}} = 6 L^2 = 6 \cdot 10^2 = 6 \cdot 100 = 600 \text{ cm}^2$$

$$A_{t \text{ mic}} = 6 l^2 = 6 \cdot 5^2 = 6 \cdot 25 = 150 \text{ cm}^2$$

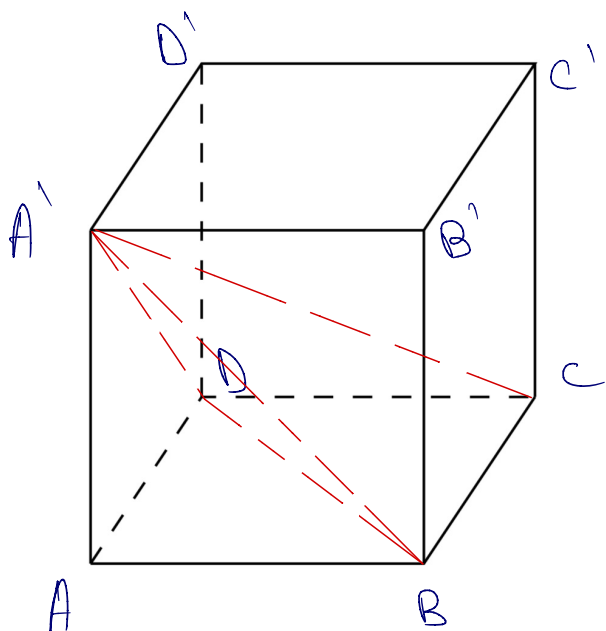
$$8 \text{ cuburi mici: } 8 \cdot A_{t \text{ mic}} = 8 \cdot 150 = 1200 \text{ cm}^2$$

$$\text{Creștere: } 1200 - 600 = 600 = A_{t \text{ mare}} \Rightarrow \text{procent} = 100\%$$

Exercițiul 8. Se consideră cubul $ABCD A' B' C' D'$ cu muchia $AB = 6$ cm.

(a) Calculați aria triunghiului $A'BD$.

(b) Calculați distanța de la vârful C la planul $(A'BD)$.



$$a) A'D = DB = A'B = d_{\text{patrat}} = l\sqrt{2} = 6\sqrt{2} \text{ cm}$$

$\Rightarrow \triangle A'BD$ echilateral

$$\Rightarrow A_{A'BD} = \frac{\text{latuna}^2 \triangle \cdot \sqrt{3}}{4} = \frac{(6\sqrt{2})^2 \cdot \sqrt{3}}{4}$$

$$\Rightarrow A_{A'BD} = \frac{18 \cdot 2\sqrt{3}}{4} = 18\sqrt{3} \text{ cm}^2$$

b) Unim punctele A' și C . Vom exprima **volumul piramidei** $CA'BD$ în două moduri:

$$V_{CA'BD} = \frac{A_{A'BD} \cdot d(C, (A'BD))}{3}$$

$$V_{CA'BD} = \frac{A_{BCD} \cdot d(A', (BCD))}{3}$$

$$\Rightarrow A_{A'BD} \cdot d(C, (A'BD)) = A_{BCD} \cdot d(A', (BCD))$$

$$\Rightarrow d(C, (A'BD)) = \frac{A_{BCD} \cdot d(A', (BCD))}{A_{A'BD}}$$

$$\textcircled{1} A_{BCD} = \frac{c_1 \cdot c_2}{2} = \frac{BC \cdot CD}{2} = \frac{6 \cdot 6}{2} = 18 \text{ cm}^2$$

$$\textcircled{2} A'A \perp (BCD) \Rightarrow d(A', (BCD)) = A'A = 6 \text{ cm}$$

$$\textcircled{3} \text{ De la subpunctul a): } A_{A'BD} = 18\sqrt{3} \text{ cm}^2$$

$$\Rightarrow d(C, (A'BD)) = \frac{18 \cdot 6}{18\sqrt{3}} = \frac{6\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3} \text{ cm}$$