

Fișă de lucru - Rezolvare

Lecția 2 - Criterii de asemănare a triunghiurilor

Clasa a 7-a – Asemănarea triunghiurilor

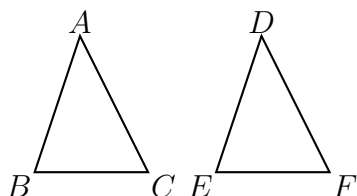
Instrucțiuni

Rezolvă exercițiile folosind criteriile de asemănare (U.U., L.U.L., L.L.L.).
Identifică perechile de triunghiuri asemenea și scrie rapoartele de proporționalitate.
Durata recomandată: **50 de minute**.

Exerciții

Exercițiul 1. Se consideră triunghiul ABC cu $\angle A = 40^\circ$ și $\angle B = 80^\circ$. Triunghiul DEF are $\angle D = 40^\circ$ și $\angle F = 60^\circ$.

- Calculează măsura unghiului C și măsura unghiului E .
- Stabilește dacă $\triangle ABC \sim \triangle DEF$. Justifică răspunsul.



a)

Suma măsurilor unghiurilor într-un triunghi este 180° .

$$\begin{aligned} \text{În } \triangle ABC: m(\angle A) + m(\angle B) + m(\angle C) &= 180^\circ \\ m(\angle C) &= 180^\circ - m(\angle A) - m(\angle B) = 180^\circ - 40^\circ - 80^\circ = 60^\circ \end{aligned}$$

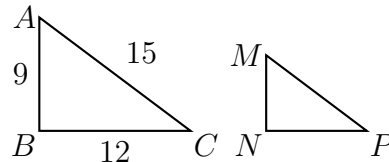
$$\begin{aligned} \text{În } \triangle DEF: m(\angle E) + m(\angle D) + m(\angle F) &= 180^\circ \\ m(\angle E) &= 180^\circ - m(\angle D) - m(\angle F) = 180^\circ - 40^\circ - 60^\circ = 80^\circ \end{aligned}$$

b) Considerăm $\triangle ABC$ și $\triangle DEF$

$$\begin{aligned} m(\angle A) &= m(\angle D) = 40^\circ \\ m(\angle B) &= m(\angle E) = 80^\circ \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \text{u.u.} \\ \text{(unghi. unghi.)} \end{array} \right\} \xRightarrow{1} \triangle ABC \sim \triangle DEF$$

Exercițiul 2. Triunghiul ABC are laturile $AB = 9$ cm, $BC = 12$ cm și $AC = 15$ cm. Se știe că $\triangle ABC \sim \triangle MNP$ și că cea mai scurtă latură a triunghiului MNP are lungimea de 6 cm.

- (a) Determină raportul de asemănare.
 (b) Calculează perimetrul triunghiului MNP .



- a) $AB < BC < AC \Rightarrow AB$ este cea mai scurtă latură în $\triangle ABC$
 $\triangle ABC \sim \triangle MNP \Rightarrow MN$ este cea mai scurtă latură în $\triangle MNP$

$$\frac{AB}{MN} = \frac{BC}{NP} = \frac{AC}{MP} = k$$

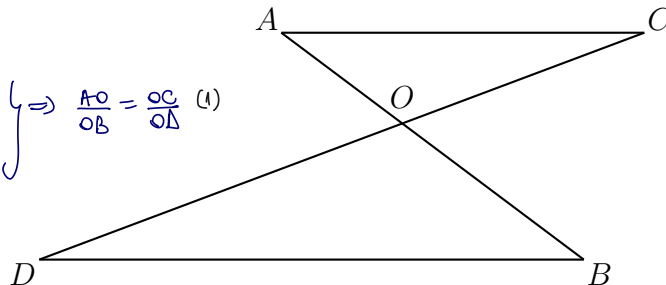
$$k = \frac{AB}{MN} = \frac{9}{6} = \frac{3}{2}$$

b) $P_{\triangle ABC} = AB + BC + CA = 9 + 12 + 15 = 36$ cm

$$\frac{P_{\triangle ABC}}{P_{\triangle MNP}} = k \Rightarrow P_{\triangle MNP} = \frac{P_{\triangle ABC}}{k} = \frac{36}{\frac{3}{2}} = 36 \cdot \frac{2}{3} = 12 \cdot 2 = 24$$
 cm

Exercițiul 3. În figura de mai jos, segmentele AB și CD se intersectează în punctul O . Se dau lungimile: $AO = 4$ cm, $OB = 6$ cm, $OC = 8$ cm și $OD = 12$ cm.

- (a) Demonstrează că $\triangle AOC \sim \triangle BOD$.
 (b) Dacă $AC = 5$ cm, calculează lungimea segmentului BD .



a) $\frac{AO}{OB} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} \quad \left\{ \Rightarrow \quad \frac{AO}{OB} = \frac{OC}{OD} \quad (1) \right.$
 $\frac{OC}{OD} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$

considerăm $\triangle AOC$ și $\triangle BOD$

$$\frac{AO}{OB} = \frac{OC}{OD} \quad (2)$$

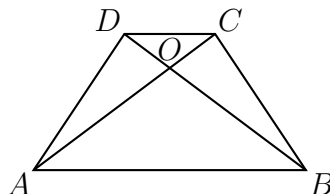
$\angle AOC \equiv \angle BOD$ (opuse la vârf)

$\left. \begin{array}{l} \text{L.U.L.} \\ (1) \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle AOC \sim \triangle BOD$

b) $\triangle AOC \sim \triangle BOD \Rightarrow \frac{AC}{BD} = \frac{AO}{BO}$

$$\frac{AC}{BD} = \frac{2}{3} \quad \left\{ \Rightarrow \quad BD = \frac{3 \cdot AC}{2} = \frac{3 \cdot 5}{2} = \frac{15}{2} = 7.5$$
 cm
 $AC = 5$ cm

Exercițiul 4. Fie trapezul $ABCD$ cu bazele $AB \parallel CD$, $AB = 30$ cm și $CD = 10$ cm. Diagonalele AC și BD se intersectează în punctul O . Știind că diagonala $AC = 32$ cm, calculează lungimile segmentelor AO și OC .



$$AB \parallel CD \Rightarrow \begin{cases} \angle OAB \equiv \angle OCD \text{ (alterne interne, AC-secantă)} \\ \angle ODO \equiv \angle OBO \text{ (alterne interne, BD-secantă)} \end{cases} \xrightarrow{\text{u.u.}} \triangle AOB \sim \triangle COD$$

$$\triangle AOB \sim \triangle COD \Rightarrow \frac{AO}{CO} = \frac{OB}{OD} = \frac{AB}{CD} \Rightarrow \frac{OC}{OA} = \frac{CD}{AB} = \frac{10}{30} = \frac{1}{3}$$

$$\frac{OC}{OA} = \frac{1}{3} \Rightarrow OA = 3OC$$

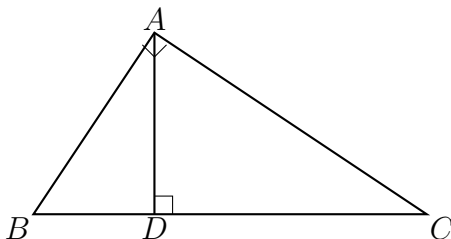
$$AC = AO + OC = 3OC + OC \Rightarrow 4OC = AC \quad \begin{matrix} AC = 32 \text{ cm} \\ \end{matrix} \quad \begin{matrix} \Rightarrow 4OC = 32 \\ \end{matrix} \quad \begin{matrix} :4 \\ \end{matrix} \quad \begin{matrix} OC = 8 \text{ cm} \end{matrix}$$

$$OA = 3OC = 3 \cdot 8 = 24 \text{ cm}$$

Exercițiul 5. Se consideră triunghiul dreptunghic ABC ($\angle A = 90^\circ$) și $AD \perp BC$, cu $D \in BC$.

(a) Arată că $\triangle DBA \sim \triangle DAC$.

(b) Dacă $BD = 4$ cm și $CD = 9$ cm, calculează lungimea înălțimii AD .



a) Fie $m(\angle C) = x$

$$\text{În } \triangle ABC: m(\angle A) = 90^\circ \Rightarrow m(\angle B) = 180^\circ - 90^\circ - x \Rightarrow m(\angle B) = 90^\circ - x$$

$$\text{În } \triangle DAC: m(\angle A) = 90^\circ \Rightarrow m(\angle DAC) = 180^\circ - m(\angle C) - 90^\circ = 90^\circ - x$$

$$\text{Deci } m(\angle ABC) = m(\angle DAC) \quad (1)$$

Considerăm $\triangle DBA$ și $\triangle DAC$

$$\begin{matrix} m(\angle ABC) = m(\angle DAC) \quad (1) \\ m(\angle BDA) = m(\angle ADC) = 90^\circ \end{matrix} \quad \xrightarrow{\text{u.u.}} \triangle DBA \sim \triangle DAC \Rightarrow \frac{DB}{DA} = \frac{BA}{AC} = \frac{DA}{DC}$$

b)

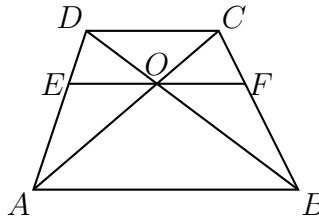
$$\frac{BD}{DA} = \frac{DA}{CD} \Rightarrow AD \cdot AD = BD \cdot CD$$

$$AD^2 = BD \cdot CD$$

$$AD = \sqrt{BD \cdot CD} = \sqrt{4 \cdot 9} = \sqrt{36}$$

$$AD = 6 \text{ cm}$$

Exercițiul 6. În trapezul $ABCD$ ($AB \parallel CD$), diagonalele se intersectează în O . Prin O se duce o dreaptă paralelă cu bazele, care intersectează laturile AD și BC în punctele E , respectiv F . Demonstrează că $EO = OF$.



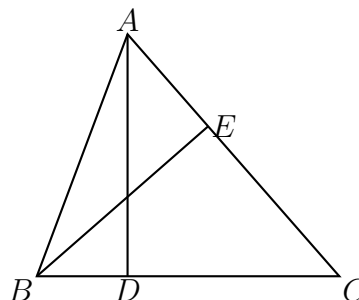
Considerăm $\triangle AEO$ și $\triangle AOC$
 $\angle AEO \equiv \angle AOC$ ($EO \parallel AC$)
 $\angle AOE \equiv \angle ACO$ ($EO \parallel AC$)
 $\Rightarrow \triangle AEO \sim \triangle AOC \Rightarrow \frac{AE}{AO} = \frac{EO}{AO} = \frac{AO}{AC}$ (1)

Considerăm $\triangle BFO$ și $\triangle BOC$
 $\angle BFO \equiv \angle BOC$ ($OF \parallel BC$)
 $\angle BOF \equiv \angle BCO$ ($OF \parallel BC$)
 $\Rightarrow \triangle BFO \sim \triangle BOC \Rightarrow \frac{BF}{BO} = \frac{FO}{BO} = \frac{BO}{BC}$ (2)

Considerăm $\triangle AOB$ și $\triangle COD$
 $\angle OAB \equiv \angle OCD$
 $\angle OBA \equiv \angle ODC$
 $\Rightarrow \triangle AOB \sim \triangle COD \Rightarrow \frac{AO}{CO} = \frac{OB}{OD} = \frac{AB}{CD}$
 $\frac{AO}{CO} = \frac{OB}{OD} \Rightarrow \frac{AO}{AO+OC} = \frac{OB}{BO+OD} \Rightarrow \frac{AO}{AC} = \frac{OB}{BD}$
 $\frac{EO}{AO} = \frac{FO}{OB} \Rightarrow \frac{EO}{AC} = \frac{FO}{BD} \Rightarrow EO = FO$

Exercițiul 7. Fie triunghiul ascuțitunghic ABC și înălțimile $AD \perp BC$ ($D \in BC$) și $BE \perp AC$ ($E \in AC$).

- (a) Demonstrează că $\triangle ADC \sim \triangle BEC$ și scrie raportul de asemănare.
 (b) Arată că produsul $CD \cdot CB$ este egal cu produsul $CE \cdot CA$.

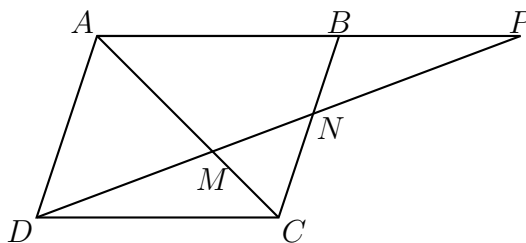


a) Comparăm $\triangle ADC$ și $\triangle BEC$
 $m(\angle ADC) = m(\angle BEC) = 90^\circ$
 $\angle C$ - unghi comun
 $\Rightarrow \triangle ADC \sim \triangle BEC \Rightarrow \frac{AD}{BE} = \frac{DC}{EC} = \frac{AC}{BC}$

b)

$$\frac{CD}{CE} = \frac{CA}{CB} \Rightarrow CD \cdot CB = CE \cdot CA$$

Exercițiul 8. Se consideră paralelogramul $ABCD$. O dreaptă care trece prin vârful D intersectează diagonala AC în M , latura BC în N și prelungirea laturii AB în P . Demonstrează relația: $DM^2 = MN \cdot MP$.



$$ABCD - \text{paralelogram} \Rightarrow \begin{matrix} AD \parallel BC \\ N \in BC \end{matrix} \Bigg\} \Rightarrow AD \parallel BN$$

considerăm $\triangle AMD$ și $\triangle CMN$

$$\begin{matrix} \sphericalangle DAM \equiv \sphericalangle NCM & (\text{alterne interne, } AC\text{-secantă}) \\ \sphericalangle ADM \equiv \sphericalangle CNM & (\text{alterne interne, } DN\text{-secantă}) \end{matrix} \Bigg\} \overset{u.u.}{\Rightarrow} \triangle AMD \sim \triangle CMN \Rightarrow \frac{AM}{CM} = \frac{MD}{MN} = \frac{AD}{CN} \quad (1)$$

$$ABCD - \text{paralelogram} \Rightarrow \begin{matrix} CD \parallel AB \\ P \in AB \end{matrix} \Bigg\} \Rightarrow DP \parallel CD$$

considerăm $\triangle CMD$ și $\triangle AMP$

$$\begin{matrix} \sphericalangle MCD \equiv \sphericalangle MAP & (\text{alterne interne, } AC\text{-secantă}) \\ \sphericalangle MDC \equiv \sphericalangle MPA & (\text{alterne interne, } DP\text{-secantă}) \end{matrix} \Bigg\} \overset{u.u.}{\Rightarrow} \triangle CMD \sim \triangle AMP \Rightarrow \frac{CM}{AM} = \frac{MD}{MP} = \frac{CD}{AP} \quad (2)$$

$$\text{Din (1)} \Rightarrow \frac{DM}{MN} = \frac{AM}{MC}$$

$$\text{Din (2)} \Rightarrow \frac{CM}{AM} = \frac{DM}{MP} \Rightarrow \frac{AM}{CM} = \frac{MP}{DM}$$

$$\Bigg\} \Rightarrow \frac{DM}{MN} = \frac{MP}{DM}$$

$$\frac{DM}{MN} = \frac{MP}{DM}$$

$$\Rightarrow DM \cdot DM = MN \cdot MP$$

$$DM^2 = MN \cdot MP$$