

Lecția 2 - Teorema lui Thales

Clasa a 7-a – Capitolul Geometrie

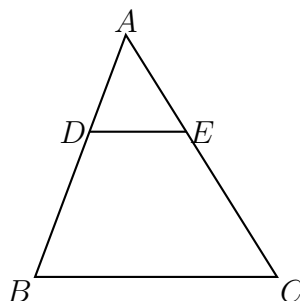
Instrucțiuni

Rezolvă exercițiile de mai jos folosind Teorema lui Thales și proprietățile rapoartelor. Durata recomandată: **45 de minute**.

Exerciții

Exercițiul 1. În triunghiul ABC , avem $DE \parallel BC$, cu $D \in AB$ și $E \in AC$. Se cunosc lungimile segmentelor: $AD = 4$ cm, $DB = 6$ cm și $AE = 5$ cm.

- Calculează lungimea segmentului EC .
- Determină lungimea laturii AC .



a)

$$\left. \begin{array}{l} DE \parallel BC \\ D \in AB, E \in AC \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Teorema} \\ \text{lui} \\ \text{Thales} \end{array} \Rightarrow \frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$$

$$AD \cdot EC = DB \cdot AE \quad | : AD$$

$$EC = \frac{DB \cdot AE}{AD} = \frac{6 \cdot 5}{4} = \frac{15}{2} = 7,5 \text{ cm}$$

b)

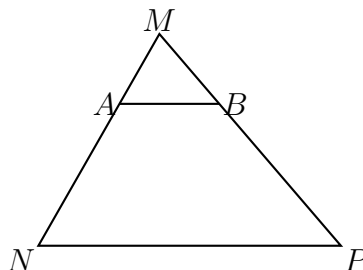
$$AC = AE + EC$$

$$AC = 5 + 7,5$$

$$AC = 12,5 \text{ cm}$$

Exercițiul 2. Se consideră triunghiul MNP și punctele $A \in MN, B \in MP$ astfel încât $AB \parallel NP$. Știind că $MN = 30$ cm, $MA = 10$ cm și $MP = 36$ cm, calculează lungimile segmentelor MB și BP .

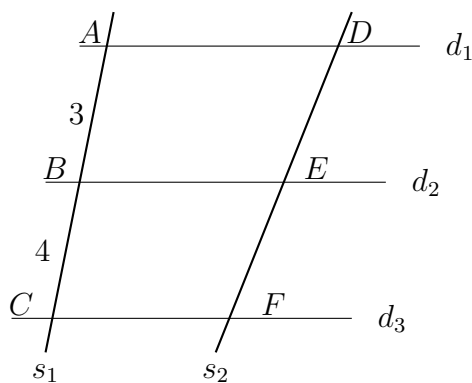
$$\begin{aligned} A \in MN &\Rightarrow MN = MA + AN \\ AN &= MN - MA \\ AN &= 30 - 10 \\ AN &= 20 \text{ cm} \end{aligned}$$



$$AB \parallel NP, A \in MN, B \in MP \xrightarrow[\text{Thales}]{\text{Teorema lui}} \frac{MA}{AN} = \frac{MB}{BP} \Rightarrow BP = \frac{AN \cdot MB}{MA} = \frac{20 \cdot MB}{10} = 2MB$$

$$\begin{aligned} M-B-P \text{ coliniare} &\Rightarrow MB + BP = MP \\ MB + 2MB &= 36 \\ 3MB &= 36 \quad | :3 \\ MB &= 12 \text{ cm} \\ BP &= 2MB \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad BP = 2 \cdot 12 = 24 \text{ cm}$$

Exercițiul 3. În figura alăturată, dreptele d_1, d_2 și d_3 sunt paralele. Acestea determină pe secanta s_1 segmentele $AB = 3$ cm și $BC = 4$ cm, iar pe secanta s_2 determină segmentele DE și EF . Știind că $DF = 21$ cm, calculează lungimile segmentelor DE și EF .



$$d_1 \parallel d_2 \parallel d_3 \Rightarrow \frac{AB}{BC} = \frac{DE}{EF} \quad (\text{Teorema lui Thales generalizată})$$

$$\begin{aligned} \frac{3}{4} &= \frac{DE}{EF} \Rightarrow 3EF = 4DE \quad | :12 \\ \cancel{3}EF &= \cancel{4}DE \Rightarrow \frac{EF}{4} = \frac{DE}{3} = k \end{aligned}$$

$$EF = 4k$$

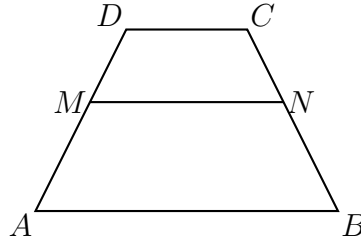
$$DE = 3k$$

$$DE + EF = DF$$

$$4k + 3k = 21$$

$$7k = 21 \quad | :7 \Rightarrow k = 3 \Rightarrow \begin{aligned} EF &= 4 \cdot 3 = 12 \text{ cm} \\ DE &= 3 \cdot 3 = 9 \text{ cm} \end{aligned}$$

Exercițiul 4. În trapezul $ABCD$ cu $AB \parallel CD$, se consideră punctul M pe latura AD astfel încât raportul $\frac{AM}{AD} = \frac{2}{5}$. Prin punctul M se duce o paralelă la bazele trapezului care intersectează latura BC în punctul N . Dacă $BC = 25$ cm, calculează lungimile segmentelor BN și NC .



$M \in AD$, $N \in BC$, $MN \parallel AB \parallel DC$

conform Teoremei lui Thales, $\frac{AM}{MD} = \frac{BN}{NC}$

Folosim proprietatea proporțiilor derivate:

Dacă $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, atunci $\frac{a}{a+b} = \frac{c}{c+d}$

$$\frac{AM}{MD} = \frac{BN}{NC} \Rightarrow \frac{AM}{\underbrace{AM+MD}_{AD}} = \frac{BN}{\underbrace{BN+NC}_{BC}} \Rightarrow \frac{AM}{AD} = \frac{BN}{BC}$$

Din ipoteză știm că $\frac{AM}{AD} = \frac{2}{5}$ și $BC = 25$ cm

$$\frac{BN}{BC} = \frac{2}{5}$$

$$\frac{BN}{25} = \frac{2}{5} \Rightarrow \cancel{5}BN = 2 \cdot \cancel{25} \cancel{5}$$

$$BN = 2 \cdot 5$$

$$BN = 10 \text{ cm}$$

$C-N-B$ coliniare $\Rightarrow CN + NB = CB$

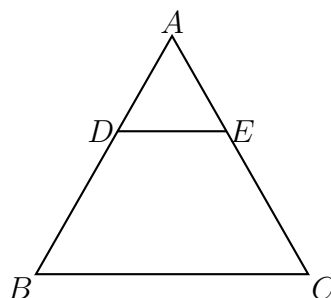
$$NC = BC - BN$$

$$NC = 25 - 10$$

$$NC = 15 \text{ cm}$$

Exercițiul 5. Fie triunghiul ABC și punctele $D \in AB, E \in AC$ astfel încât $DE \parallel BC$. Se știe că $AD = x$ cm, $DB = 2$ cm, $AE = x + 1$ cm și $EC = 3$ cm.

- (a) Determină valoarea reală a lui x .
 (b) Calculează lungimile laturilor AB și AC .



a)

$$DE \parallel BC, D \in AB, E \in AC \xRightarrow[\text{Teorema lui Thales}]{\text{Teorema}} \frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$$

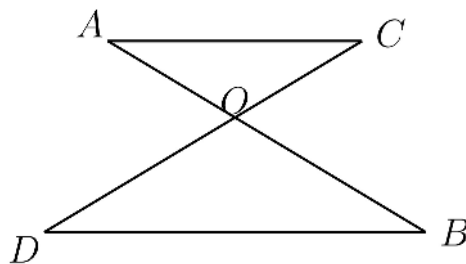
$$\left. \begin{array}{l} AD = x \text{ cm} \\ DB = 2 \text{ cm} \\ AE = x + 1 \text{ cm} \\ EC = 3 \text{ cm} \\ \frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{x}{2} = \frac{x+1}{3} \Rightarrow 3x = 2(x+1) \Rightarrow 3x = 2x + 2 \quad | -2x \Rightarrow x = 2 \text{ cm}$$

b)

$$\left. \begin{array}{l} AB = AD + DB \\ AD = x = 2 \text{ cm} \\ DB = 2 \text{ cm} \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} AB = 2 + 2 \\ AB = 4 \text{ cm} \end{array}$$

$$\left. \begin{array}{l} AC = AE + EC \\ AE = x + 1 = 2 + 1 = 3 \text{ cm} \\ EC = 3 \text{ cm} \end{array} \right\} \Rightarrow AC = 3 + 3 = 6 \text{ cm}$$

Exercițiul 6. Fie segmentul AB și segmentul CD care se intersectează în punctul O . Dreptele AC și BD sunt paralele. Dacă $OA = 8$ cm, $OC = 6$ cm și $OB = 12$ cm, calculează lungimea segmentului OD .



Deoarece $AC \parallel BD$ și sunt tăiate de secantele AB și CD care intersectează în O , conform Teoremei lui Thales, rapoartele segmentelor determinate pe prima secantă sunt egale cu rapoartele corespunzătoare de pe a doua secantă.

$$\frac{OA}{OB} = \frac{OC}{OD} \Rightarrow OA \cdot OD = OB \cdot OC$$

$$OA = 8 \text{ cm}$$

$$OC = 6 \text{ cm}$$

$$OB = 12 \text{ cm}$$

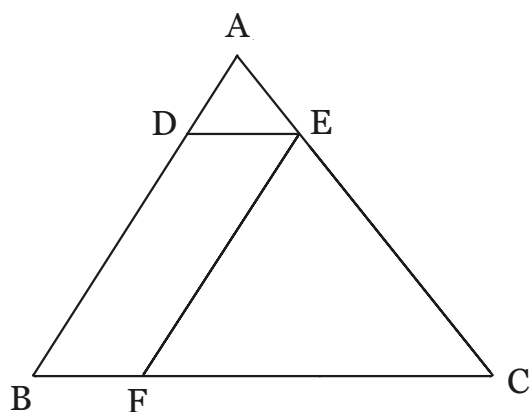
$$OD = \frac{OB \cdot OC}{OA}$$

$$OD = \frac{12 \cdot 6}{8} = \frac{72}{8}$$

$$OD = 9 \text{ cm}$$

Exercițiul 7. În triunghiul ABC , se ia punctul D pe latura AB astfel încât $\frac{AD}{AB} = \frac{1}{4}$. Prin D se duce paralela $DE \parallel BC$ ($E \in AC$), iar prin E se duce paralela $EF \parallel AB$ ($F \in BC$).

- (a) Arată că $\frac{AE}{AC} = \frac{1}{4}$.
 (b) Demonstrează că $\frac{BF}{BC} = \frac{1}{4}$.



a)

În $\triangle ABC$:
 $D \in AB, E \in AC$
 $DE \parallel BC$

$\left. \begin{array}{l} \text{Teorema} \\ \text{lui} \\ \text{Thales} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$

Folosim proporții derivate

$$\frac{AD}{AD+DB} = \frac{AE}{AE+EC}$$

$\underbrace{AD+DB}_{AB} \quad \underbrace{AE+EC}_{AC}$

$$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} \quad \left. \begin{array}{l} \Rightarrow \\ \frac{AD}{AB} = \frac{1}{4} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{AE}{AC} = \frac{1}{4}$$

b)

În $\triangle ABC$:
 $F \in BC, E \in AC$
 $EF \parallel AB$

$\left. \begin{array}{l} \text{Teorema} \\ \text{lui} \\ \text{Thales} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{CE}{EA} = \frac{CF}{FB}$

$$\frac{CE}{CE+EA} = \frac{CF}{CF+FB} \Rightarrow \frac{CE}{CA} = \frac{CF}{CB} \quad 6$$

$\underbrace{CE+EA}_{CA} \quad \underbrace{CF+FB}_{CB}$

$$\frac{AE}{AC} = \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{EC}{AC} = 1 - \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{EC}{AC} = \frac{3}{4}$$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{CE}{CA} = \frac{CF}{CB} \\ \frac{EC}{AC} = \frac{3}{4} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{CF}{CB} = \frac{3}{4}$$

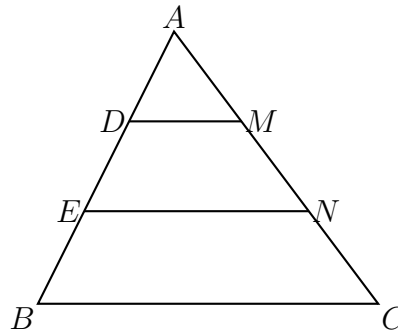
$$\frac{BF}{CB} = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$$

$$\frac{BF}{CB} = \frac{1}{4}$$

Exercițiul 8. În triunghiul ABC , pe latura AB se consideră punctele D și E astfel încât $AD = DE = EB$. Prin punctele D și E se duc paralele la latura BC , care intersectează latura AC în punctele M , respectiv N .

(a) Determină valoarea raportului $\frac{AM}{MN}$.

(b) Dacă $AC = 18$ cm, calculează lungimea segmentului NC .



a)

$$DM \parallel EN \xRightarrow[\text{Teorema lui Thales}]{\text{Teorema lui Thales}} \frac{AD}{DE} = \frac{AM}{MN}$$

$$AD = DE = EB \Rightarrow \frac{AD}{AD} = \frac{AM}{MN} \Rightarrow \frac{AM}{MN} = 1 \Rightarrow AM = MN$$

b)

$$EN \parallel BC \xRightarrow[\text{Teorema lui Thales}]{\text{Teorema lui Thales}} \frac{AE}{EB} = \frac{AN}{NC}$$

$$AE = AD + DE$$

$$AD = DE = EB = k$$

$$AE = k + k = 2k$$

$$\frac{AE}{EB} = \frac{2k}{k} \Rightarrow \frac{AE}{EB} = 2 \Rightarrow \frac{AN}{NC} = 2 \Rightarrow AN = 2NC$$

$$AN = AM + MN$$

De la punctul a), am demonstrat că $AM = MN$

$$AN = MN + MN$$

$$AN = 2MN \quad \bigg| \Rightarrow \quad \cancel{2MN} = \cancel{2NC}$$

$$AN = 2NC \quad \bigg| \Rightarrow \quad \begin{matrix} MN = NC \\ AM = MN \end{matrix} \quad \bigg| \Rightarrow \quad MN = NC = AM$$

$$AC = AM + MN + NC$$

$$AC = 3NC \Rightarrow NC = \frac{AC}{3} \quad \bigg| \Rightarrow \quad NC = \frac{18}{3} = 6 \text{ cm}$$

$$AC = 18 \text{ cm}$$