

Lecția 1 - Teorema Fundamentală a Asemănării

Clasa a 7-a – Asemănarea triunghiurilor

Instrucțiuni

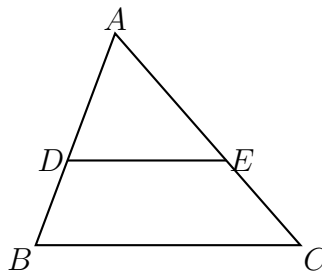
Rezolvă exercițiile folosind Teorema Fundamentală a Asemănării: O paralelă dusă la una din laturile unui triunghi formează cu celelalte două laturi un triunghi asemenea cu cel dat.

Durata recomandată: **50 de minute**.

Exerciții

Exercițiul 1. În triunghiul ABC , punctele $D \in AB$ și $E \in AC$ sunt alese astfel încât $DE \parallel BC$. Se cunosc lungimile $AD = 6$ cm, $DB = 4$ cm și $AE = 9$ cm.

- Calculează lungimea segmentului EC .
- Determină raportul de asemănare al triunghiurilor $\triangle ADE$ și $\triangle ABC$.



a)

$$\begin{array}{l} DE \parallel BC \\ \triangle ADE \sim \triangle ABC \end{array} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Teorema} \\ \text{lui} \\ \text{Thales} \end{array} \right. \Rightarrow \frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} \Rightarrow EC = \frac{AB \cdot AE}{AD} = \frac{4 \cdot 9}{6} = \frac{36}{6} = 6 \text{ cm}$$

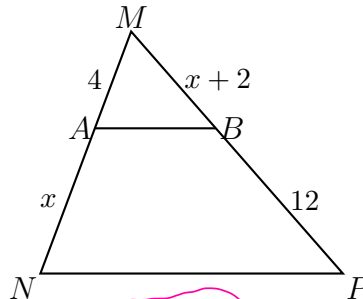
b)

Deoarece $DE \parallel BC$, conform Teoremei Fundamentale a Asemănării (T.F.A.) $\Rightarrow \triangle ADE \sim \triangle ABC \Rightarrow \frac{AD}{AB} = \frac{DE}{BC} = \frac{AE}{AC} = k$, $k = \text{raport de asemănare}$

$$AB = AD + DB = 6 + 4 = 10 \text{ cm}$$

$$k = \frac{AD}{AB} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5} \Rightarrow k = \frac{3}{5}$$

Exercițiul 2. În triunghiul MNP , o dreaptă paralelă cu latura NP intersectează laturile MN și MP în punctele A , respectiv B . Lungimile segmentelor sunt date în funcție de un număr real x ($x > 0$): $MA = 4$ cm, $AN = x$ cm, $MB = x + 2$ cm și $BP = 12$ cm. Determină valoarea lui x și lungimea laturii MN .



$AB \parallel NP \xrightarrow[\text{Fundamentală}]{\text{Teorema}}$
a
Asemănării

$$\triangle MAB \sim \triangle MNP \Rightarrow \frac{MA}{MN} = \frac{AB}{NP} = \frac{MB}{MP}$$

$$MN = MA + AN = 4 + x$$

$$MP = MB + BP = x + 2 + 12 = x + 14$$

$$\frac{4}{4+x} = \frac{x+2}{x+14} \Rightarrow 4(x+14) = (4+x)(x+2) \Rightarrow 4x+56 = 4x+8+x^2+2x$$

$$x^2 + 2x + 8 = 56 \quad | -56 \Rightarrow x^2 + 2x - 48 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$a=1, b=2, c=-48$$

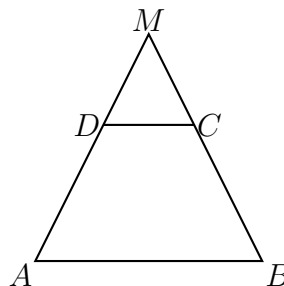
$$\Delta = 4 - 4 \cdot 1 \cdot (-48) = 4 + 192 = 196 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = \sqrt{196} \Rightarrow \sqrt{\Delta} = 14$$

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2 + 14}{2} = \frac{12}{2} = 6$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2 - 14}{2} = \frac{-16}{2} = -8 < 0 \quad \Rightarrow x = 6 \Rightarrow AN = 6 \text{ cm}$$

$$MN = MA + AN = 4 + 6 = 10 \text{ cm}$$

Exercițiul 3. Se consideră trapezul $ABCD$ cu bazele $AB \parallel CD$, $AB > CD$. Punctul M este intersecția dreptelor neparalele AD și BC . Știind că $CD = 6$ cm, $AB = 18$ cm și $AD = 10$ cm, calculează lungimea segmentului MD .



Deoarece bazele trapezului sunt paralele $CD \parallel AB$, în triunghiul mare $\triangle MAB$ se formează triunghiul mic asemenea $\triangle MCD \sim \triangle MAB$

$$\triangle MCD \sim \triangle MAB \Rightarrow \frac{MD}{MA} = \frac{CD}{AB}$$

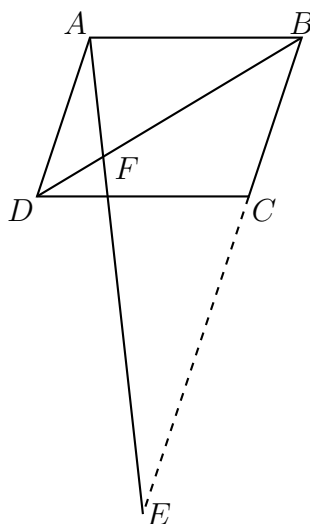
2

Notăm $MD = y \Rightarrow MA = MD + DA \Rightarrow MA = y + 10$

$$\frac{y}{y+10} = \frac{6}{18} \Rightarrow 18y = 6(y+10) \quad | :6$$

$$3y = y + 10 \quad | -y \Rightarrow 2y = 10 \quad | :2 \Rightarrow y = 5 \Rightarrow MD = 5 \text{ cm}$$

Exercițiul 4. Fie paralelogramul $ABCD$. O dreaptă care trece prin vârful A intersectează dreapta BC în punctul E și diagonala BD în punctul F . Știind că $BE = 3 \cdot BC$, calculează raportul $\frac{BF}{FD}$.



$$ABCD - \text{paralelogram} \Rightarrow \begin{matrix} AD \parallel BC \\ E \in BC \end{matrix} \Rightarrow \Delta BEF \sim \Delta DAF \Rightarrow \frac{BE}{DA} = \frac{EF}{AF} = \frac{BF}{DF}$$

$$\frac{BF}{FD} = \frac{BE}{AD}$$

$$ABCD - \text{paralelogram} \Rightarrow AD = BC$$

$$\frac{BF}{FD} = \frac{BE}{BC}$$

Din ipoteză știm că $BE = 3BC$

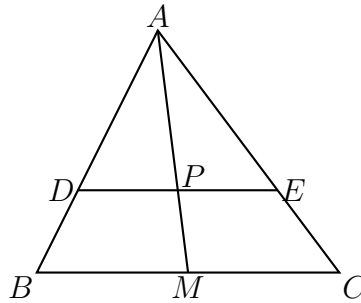
$$\frac{BF}{FD} = \frac{3BC}{BC}$$

3

Deci, $\frac{BF}{FD} = 3$

Exercițiul 5. În triunghiul ABC , AM este mediană ($M \in BC$). O dreaptă paralelă cu BC intersectează laturile AB , AC și mediana AM în punctele D , E , respectiv P .

- (a) Demonstrează că P este mijlocul segmentului DE .
 (b) Dacă $BC = 24$ cm și $\frac{AD}{AB} = \frac{2}{3}$, calculează lungimea segmentului DE .



a)

$$\text{În } \triangle ABM: \left. \begin{array}{l} DP \parallel BM \\ \text{T.F.A.} \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle ADP \sim \triangle ABM \Rightarrow \frac{AD}{AB} = \frac{DP}{BM} = \frac{AP}{AM}$$

$$\text{În } \triangle ACM: \left. \begin{array}{l} PE \parallel MC \\ \text{T.F.A.} \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle APE \sim \triangle AMC \Rightarrow \frac{AP}{AM} = \frac{PE}{MC} = \frac{AE}{AC}$$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{DP}{BM} = \frac{AP}{AM} \\ \frac{PE}{MC} = \frac{AP}{AM} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{DP}{BM} = \frac{PE}{MC}$$

$$\text{AM - mediană în } \triangle ABC \Rightarrow M - \text{mijlocul lui BC} \Rightarrow BM = MC = \frac{BC}{2}$$

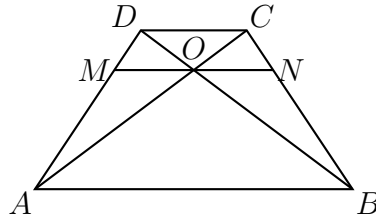
$$\left. \begin{array}{l} \frac{DP}{BM} = \frac{PE}{MC} \\ BM = MC \end{array} \right\} \Rightarrow DP = PE \Rightarrow P - \text{mijlocul lui DE}$$

b)

$$\text{În } \triangle ABC: \left. \begin{array}{l} DE \parallel BC \\ \text{T.F.A.} \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle ADE \sim \triangle ABC \Rightarrow \frac{AD}{AB} = \frac{DE}{BC} = \frac{AE}{AC}$$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{AD}{AB} = \frac{2}{3} \\ BC = 24 \text{ cm} \end{array} \right\} \Rightarrow DE = \frac{AD \cdot BC}{AB} = \frac{AD}{AB} \cdot BC = \frac{2}{3} \cdot 24 = 16 \text{ cm}$$

Exercițiul 6. Fie trapezul $ABCD$ cu $AB \parallel CD$ și $AB = 20$ cm, $CD = 5$ cm. Diagonalele AC și BD se intersectează în punctul O . Prin O se duce o paralelă la baze care intersectează laturile AD și BC în punctele M , respectiv N . Calculează lungimea segmentului MN .



Vom afla raportul în care O împarte diagonalele.

$$\left. \begin{array}{l} AB \parallel CD \\ \text{Joi} = AC \cap BD \end{array} \right\} \xRightarrow{\text{T.F.A.}} \Delta AOB \sim \Delta COD \Rightarrow \frac{AO}{CO} = \frac{OB}{OD} = \frac{AB}{CD}$$

$$\frac{AB}{CD} = \frac{20}{5} = 4$$

$$\frac{AO}{CO} = \frac{OB}{OD} = 4$$

Notăm $AO = 4k$ și $OC = k$

$$AC = AO + OC = 4k + k = 5k$$

Folosim proporții derivate

$$\frac{AO}{OC} = \frac{4}{1} \Rightarrow \frac{AO}{AO+OC} = \frac{4}{4+1} \Rightarrow \frac{AO}{AC} = \frac{4}{5}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{În } \Delta ADC: \\ MO \parallel DC \end{array} \right\} \xRightarrow{\text{T.F.A.}} \Delta AMO \sim \Delta ADC \Rightarrow \frac{AM}{AD} = \frac{MO}{DC} = \frac{AO}{AC}$$

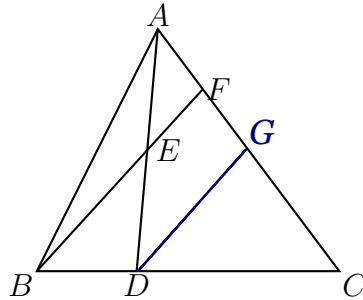
$$\left. \begin{array}{l} \frac{MO}{DC} = \frac{AO}{AC} \\ \frac{AO}{AC} = \frac{4}{5} \\ CD = 5 \text{ cm} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{MO}{5} = \frac{4}{5} \Rightarrow MO = 4 \text{ cm}$$

Datorită simetriei în trapez, segmentul obținut prin intersecția diagonalelor este ⁵ împărțit în 2 părți egale.

$$OM = ON = 4 \text{ cm}$$

$$MN = MO + ON = 4 + 4 = 8 \text{ cm}$$

Exercițiul 7. În triunghiul ABC , punctul D se află pe latura BC astfel încât $\frac{BD}{DC} = \frac{1}{2}$. Punctul E este mijlocul segmentului AD . Dreapta BE intersectează latura AC în punctul F . Folosind o construcție ajutătoare (o paralelă), determină valoarea raportului $\frac{AF}{FC}$.



Ducem prin E o paralelă la $BF \Rightarrow AG \parallel BF$

În $\triangle ADG$:
 E - mijlocul lui AD
 $EF \parallel DG$

*Reciprocă
liniei
mijlocii*

F - mijlocul lui $AG \Rightarrow AF = FG$ (1)

În $\triangle CBF$: $\left. \begin{array}{l} \text{T.F.A.} \\ AG \parallel BF \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle CDG \sim \triangle CBF \Rightarrow \frac{CD}{CB} = \frac{DG}{BF} = \frac{CG}{CF}$

$$\frac{CD}{CB} = \frac{CG}{CF} \Rightarrow \frac{CD}{CD+DB} = \frac{CG}{CG+GF} \Rightarrow \frac{CD}{DB} = \frac{CG}{GF}$$

$$\frac{CD}{DB} = \frac{CG}{GF} \quad \left. \begin{array}{l} \Rightarrow \\ \frac{BD}{DC} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{CD}{DB} = 2 \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{CG}{GF} = 2 \Rightarrow CG = 2GF$$

$$\begin{array}{l} \text{Fie } AF = x \\ AF = FG \text{ (1)} \end{array} \left\{ \begin{array}{l} \Rightarrow FG = x \\ CG = 2GF \end{array} \right. \Rightarrow CG = 2x$$

$$FC = FG + GC$$

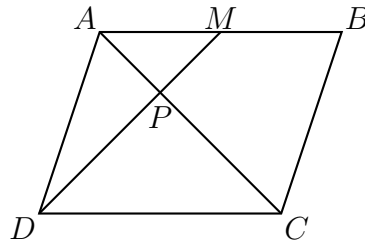
$$FC = x + 2x = 3x$$

$$\frac{AF}{FC} = \frac{x}{3x} \Rightarrow \frac{AF}{FC} = \frac{1}{3}$$

Exercițiul 8. În paralelogramul $ABCD$, punctul M este mijlocul laturii AB . Dreapta DM intersectează diagonala AC în punctul P .

(a) Arată că $\triangle APM \sim \triangle CPD$.

(b) Calculează raportul $\frac{AP}{AC}$.



a)

$ABCD$ - paralelogram $\Rightarrow AB \parallel CD$

M - mijlocul lui AB $\Rightarrow AM \parallel CD$
 $AB \parallel CD$

Avem dreptele paralele AM și CD intersectate de secantele AC și DM în punctul P $\xRightarrow{T.T.A.} \triangle APM \sim \triangle CPD$

b)

$$\triangle APM \sim \triangle CPD \Rightarrow \frac{AP}{CP} = \frac{PM}{PD} = \frac{AM}{CD}$$

$$\frac{AP}{PC} = \frac{AM}{CD}$$

$$M - \text{mijlocul lui } AB \Rightarrow AM = \frac{1}{2} AB$$

$$ABCD - \text{paralelogram} \Rightarrow CD = AB$$

$$\frac{AP}{PC} = \frac{\frac{1}{2} AB}{AB} \Rightarrow \frac{AP}{PC} = \frac{1}{2} \cdot \cancel{AB} \cdot \frac{1}{\cancel{AB}}$$

$$\frac{AP}{PC} = \frac{1}{2} \Rightarrow PC = 2AP$$

$$AC = AP + PC$$

$$AC = AP + 2AP = 3AP$$

$$\frac{AP}{AC} = \frac{\cancel{AP}}{3\cancel{AP}} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{AP}{AC} = \frac{1}{3}$$