

Lecția 1 - Proiecții ortogonale pe o dreaptă

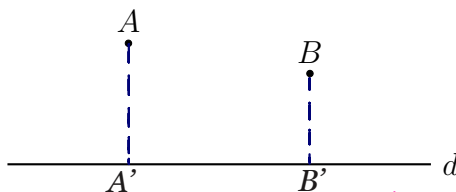
Clasa a 7-a – Capitolul Geometrie

Instrucțiuni

Rezolvă exercițiile folosind definiția proiecției ortogonale a unui punct și a unui segment pe o dreaptă. Durata recomandată: **50 de minute**.

Exerciții

Exercițiul 1. Se consideră punctele A, B și dreapta d din figura de mai jos. Construiește proiecțiile ortogonale ale punctelor A și B pe dreapta d , notate cu A' și B' .



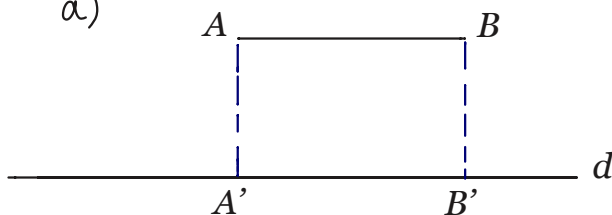
Pentru a obține proiecțiile ortogonale ale punctelor A și B pe dreapta d , vom construi 2 perpendiculare.

$AA' \perp d, A' \in d$
 $BB' \perp d, B' \in d$

Exercițiul 2. Fie segmentul AB cu lungimea de 10 cm.

- Dacă $AB \parallel d$, care este lungimea proiecției segmentului AB pe dreapta d ?
- Dacă $AB \perp d$, care este lungimea proiecției segmentului AB pe dreapta d ?

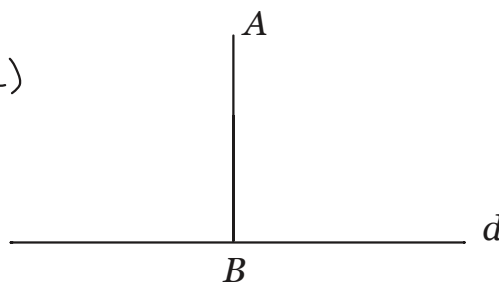
a)



$pr_d(AB) = A'B'$
 $AB \parallel d$

$\Rightarrow ABB'A' - dreptunghi$
 $AB = A'B' = 10 \text{ cm}$

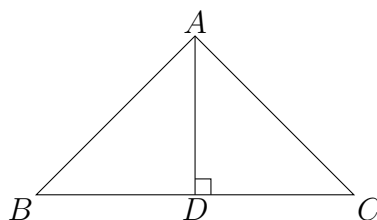
b)



$pr_d(AB) = A'B' = 0 \text{ cm}$
 Perpendiculara din A și B
 coincide cu dreapta suport

Exercițiul 3. În triunghiul dreptunghic isoscel ABC cu $\angle A = 90^\circ$, construim înălțimea $AD \perp BC$. Știind că ipotenuza $BC = 12$ cm:

- Determină proiecția catetei AB pe ipotenuza BC .
- Calculează lungimea proiecției BD .



a) Proiecția catetei AB pe ipotenuza BC este segmentul determinat de proiecția vârfului B și proiecția vârfului A .

$$B \in BC \Rightarrow pr_{BC}(B) = B$$

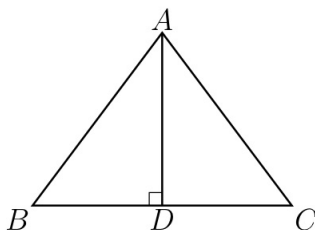
$AD \perp BC \Rightarrow A$ se proiectează în piciorul înălțimii Δ

$$pr_{BC}(AB) = \Delta B$$

b) ΔABC - dreptunghic isoscel $\Rightarrow AD$ - mediană $\Rightarrow BD = DC = \frac{BC}{2}$
 AD - înălțime $BD = \frac{12}{2} = 6$ cm

Exercițiul 4. Se consideră triunghiul isoscel ABC cu laturile congruente $AB = AC = 15$ cm și baza $BC = 18$ cm. Construim înălțimea $AD \perp BC$ ($D \in BC$).

- Determină lungimea proiecției laturii AB pe dreapta BC .
- Determină lungimea proiecției laturii AC pe dreapta BC .

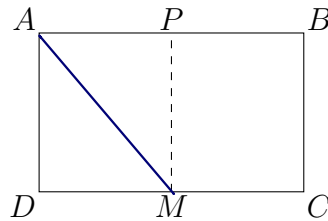


a) $pr_{BC}(B) = B$, $pr_{BC}(A) = \Delta \Rightarrow pr_{BC}(AB) = BD$
 ΔABC - isoscel, AD - înălțime $\Rightarrow AD$ - mediană $\Rightarrow BD = \frac{BC}{2} = \frac{18}{2} = 9$ cm

b) $pr_{BC}(C) = C$, $pr_{BC}(A) = \Delta \Rightarrow pr_{BC}(AC) = CD = \frac{BC}{2} = 9$ cm

Exercițiul 5. Fie dreptunghiul $ABCD$ cu $AB = 10$ cm și $BC = 6$ cm. Fie M mijlocul laturii CD .

- (a) Construiește proiecția punctului M pe latura AB , notată cu P .
 (b) Calculează lungimea proiecției segmentului AM pe latura AB .



a) Proiecția punctului M pe latura AB se obține ducând perpendiculara din M pe AB .
 $pr_{AB}(M) = P$

b)

A se proiectează în $A \Rightarrow pr_{AB}(A) = A$
 M se proiectează în $P \Rightarrow pr_{AB}(M) = P$

$pr_{AB}(A) = A$
 $pr_{AB}(M) = P \quad \Bigg\} \Rightarrow pr_{AB}(AM) = AP$

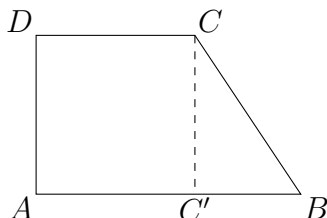
$ABCD$ - dreptunghi $\Rightarrow \begin{cases} AD \perp AB \\ CD \parallel AB, CD = AB \end{cases}$

$CD \parallel AB$
 $M \in CD, P \in AB \quad \Bigg\} \Rightarrow AP \parallel DM$

$MP \perp AB$
 $AD \perp AB$
 $AP \parallel DM \quad \Bigg\} \Rightarrow \Delta PM - \text{dreptunghi} \Rightarrow AP = DM \quad \Bigg\} \Rightarrow AP = 5 \text{ cm}$

M - mijlocul lui $CD \Rightarrow DM = \frac{DC}{2} = \frac{AB}{2} = \frac{10}{2} = 5 \text{ cm}$

Exercițiul 6. Se consideră trapezul dreptunghic $ABCD$ cu $\angle A = \angle D = 90^\circ$, $AB \parallel CD$ și $AB > CD$. Se știe că $AB = 10$ cm și $CD = 6$ cm. Dacă C' este proiecția punctului C pe latura AB , calculează lungimea segmentului AC' și lungimea segmentului $C'B$.



construim $CC' \perp AB$, $C' \in AB$

$m(\angle A) = 90^\circ$ } $\Rightarrow \triangle ACC'$ are toate unghiurile
 $CD \parallel AB$ drepte $\Rightarrow \triangle ACC'$ - dreptunghi

Într-un dreptunghi, laturile opuse sunt egale.

$\triangle ACC'$ - dreptunghi $\Rightarrow AC' = DC$

$CD = 6$ cm } $\Rightarrow AC' = 6$ cm
 $AC' = CD$

$C' \in AB \Rightarrow AC' + C'B = AB$

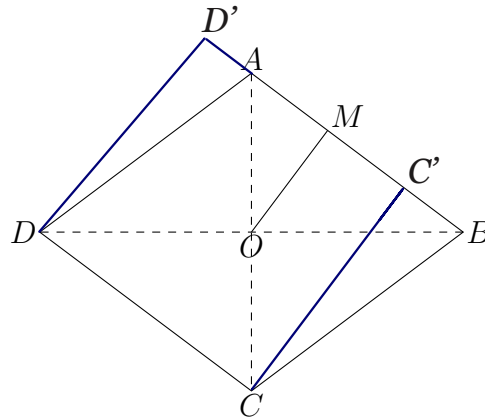
$$C'B = AB - AC'$$

$$C'B = 10 - 6$$

$$C'B = 4 \text{ cm}$$

Exercițiul 7. În rombul $ABCD$, diagonalele se intersectează în punctul O . Fie M proiecția punctului O pe latura AB .

- (a) Arată că $pr_{AB}[AC]$ este segmentul AM (sau un segment legat de acesta, verifică proiecția lui C).
- (b) Dacă $AM = 3,6$ cm și $MB = 6,4$ cm, determină lungimea proiecției segmentului BD pe dreapta AB .



a)

$$A \in AB \Rightarrow pr_{AB}(A) = A$$

$$\text{Fie } C' = pr_{AB}(C)$$

$$\left. \begin{array}{l} ABCD - \text{romb} \\ \{O\} = AC \cap BD \end{array} \right\} \Rightarrow O - \text{mijlocul lui } AC$$

$$pr_{AB}(AC) = AC'$$

$$\left. \begin{array}{l} O - \text{mijlocul lui } AC \\ pr_{AB}(O) = M \end{array} \right\} \Rightarrow M - \text{mijlocul lui } AC' \Rightarrow MA = MC' = \frac{AC'}{2}$$

$$\Rightarrow pr_{AB}(AC) = AM$$

$$b) \left. \begin{array}{l} pr_{AB}(B) = B, \quad pr_{AB}(D) = D' \end{array} \right\}$$

$$O - \text{mijlocul lui } BD$$

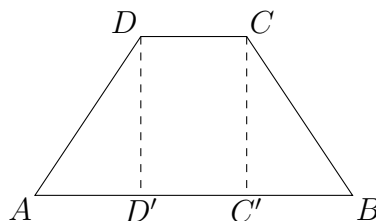
$$pr_{AB}(O) = M, \quad pr_{AB}(B) = B$$

$$\stackrel{5}{\Rightarrow} M - \text{mijlocul lui } D'B \Rightarrow$$

$$MB = \frac{D'B}{2} \Rightarrow D'B = 2MB = 2 \cdot 6,4 = 12,8 \text{ cm}$$

Exercițiul 8. Fie trapezul isoscel $ABCD$ ($AB \parallel CD, AB > CD$). Fie C' și D' proiecțiile punctelor C și D pe baza mare AB .

- (a) Demonstrează că $AD' \equiv C'B$.
- (b) Arată că lungimea proiecției laturii neparallele BC pe baza mare este egală cu semidiferența bazelor: $C'B = \frac{AB-CD}{2}$.



a)

$ABCD$ - trapez isoscel $\Rightarrow AD = BC$

$$\left. \begin{array}{l} DD' \perp AB \\ CC' \perp AB \end{array} \right\} \Rightarrow m(\angle DD'A) = m(\angle CC'B) = 90^\circ$$

$$\left. \begin{array}{l} DD' \perp AB \\ CC' \perp AB \end{array} \right\} \Rightarrow DD' \parallel CC'$$

considerăm $\triangle ADD'$ și $\triangle BCC'$

$AD = BC$ (trapez isoscel)

$DD' = CC'$ (distanța dintre paralele)

$$\left. \begin{array}{l} \text{i.c.} \\ \triangle ADD' \cong \triangle BCC' \end{array} \right\} \Rightarrow AD' = C'B$$

b)

$$DD' \parallel CC'$$

$$DC \parallel AB$$

$$D', C' \in AB$$

$$m(\angle DD'C') = m(\angle D'C'C) = 90^\circ$$

$$\left. \begin{array}{l} \Rightarrow DD'C'C - \text{dreptunghi} \\ \Rightarrow DC = D'C' \end{array} \right\}$$

$$AB = AD' + D'C' + C'B \Rightarrow AB = C'B + DC + C'B$$

$$AD' = C'B$$

$$D'C' = DC$$

$$AB = 2C'B + DC$$

6

$$AB = 2C'B + DC$$

$$2C'B = AB - DC \quad | :2 \Rightarrow C'B = \frac{AB-DC}{2}$$