

Lecția 1 - Coarde și arce de cerc

Clasa a 7-a – Capitolul Geometrie

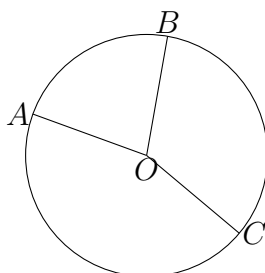
Instrucțiuni

Rezolvă exercițiile folosind proprietățile cercului: unghiul la centru, relația dintre coarde și arce, diametrul perpendicular pe coardă și arcele cuprinse între coarde paralele. Durata recomandată: **50 de minute**.

Exerciții

Exercițiul 1. Se consideră un cerc $\mathcal{C}(O, r)$. Punctele A, B, C sunt situate pe cerc în această ordine, astfel încât măsura arcului $\widehat{AB} = 80^\circ$ și măsura arcului $\widehat{BC} = 120^\circ$.

- Calculează măsura unghiului la centru $\angle AOC$ (cel mic).
- Determină măsura arcului mare $\widehat{AC}$.



a)

Măsura unghiului la centru este egală cu măsura arcului mic subîntins.

Bm află între A și C

$$m(\widehat{AC}) = m(\widehat{AB}) + m(\widehat{BC})$$

$$m(\widehat{AC}) = 80^\circ + 120^\circ$$

$$m(\widehat{AC}) = 200^\circ$$

Obs.: *Un arc mic nu poate avea 200° , trebuie să fie $< 180^\circ$*

Unghiul la centru $\angle AOC$ corespunde arcului mic $\widehat{AC}$.

$$\widehat{AC} = 360^\circ - m(\widehat{AB}) - m(\widehat{BC})$$

$$\widehat{AC} = 360^\circ - 80 - 120^\circ$$

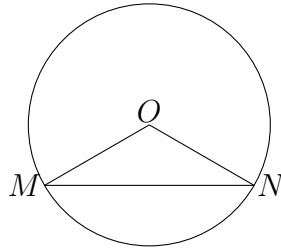
$$\widehat{AC} = 160^\circ \Rightarrow m(\angle AOC) = 160^\circ$$

b)

$$m(\widehat{AC}_{\text{mare}}) = m(\widehat{AB}) + m(\widehat{BC}) = 80^\circ + 120^\circ = 200^\circ$$

Exercițiul 2. Într-un cerc $\mathcal{C}(O, r)$ cu raza $r = 10$ cm, se consideră coarda MN . Știind că perimetrul triunghiului MON este egal cu 36 cm:

- Precizează lungimile segmentelor OM și ON .
- Calculează lungimea coardei MN .



a)

Într-un cerc, distanța de la centru la orice punct este constantă și egală cu raza.

$$M, N \in \mathcal{C}(O, r) \Rightarrow OM = ON = r$$

$$r = 10 \text{ cm} \Rightarrow OM = ON = 10 \text{ cm}$$

b)

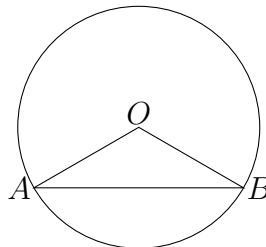
$$P_{\triangle MON} = OM + ON + MN$$

$$MN = P_{\triangle MON} - OM - ON = 36 - 10 - 10$$

$$MN = 16 \text{ cm}$$

Exercițiul 3. Se dă cercul $\mathcal{C}(O, r)$ și punctele A, B pe cerc astfel încât triunghiul AOB este echilateral.

- Care este măsura arcului mic $\widehat{AB}$?
- Dacă raza cercului este 10 cm, calculează lungimea coardei AB .



a) $\triangle AOB$ - echilateral $\Rightarrow m(\angle AOB) = m(\angle ABO) = m(\angle BAO) = 60^\circ$

Unghiul $\angle AOB$ este unghi la centru

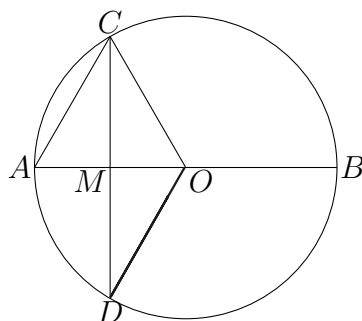
$$m(\widehat{AB}) = m(\angle AOB) = 60^\circ$$

2

b) $\triangle AOB$ - echilateral $\Rightarrow AO = OB = AB = r \Rightarrow AB = 10 \text{ cm}$
 $r = 10 \text{ cm}$

Exercițiul 4. Fie AB un diametru al cercului $\mathcal{C}(O, r)$ cu raza $r = 10$ cm. Coarda CD este perpendiculară pe AB și intersectează raza OA în mijlocul acesteia, punctul M .

- (a) Determină natura triunghiului AOC și lungimea coardei AC .
 (b) Calculează măsura unghiului la centru $\angle COD$.



a)

$$\begin{aligned} \text{În } \triangle AOC: & \begin{cases} CD \perp AB \\ CD \cap AO = \{M\} \end{cases} \Rightarrow CM \perp AO \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M - \text{mijlocul lui } OA \Rightarrow CM - \text{mediană} \\ CM - \text{înălțime} \end{aligned} \Rightarrow \triangle AOC - \text{isoscel} \Rightarrow CO = CA$$

$$CO - \text{rază} \Rightarrow CO = r \text{ și } AO = r$$

$$CA = CO = AO = r \Rightarrow \triangle AOC - \text{echilateral}$$

$$AC = r = 10 \text{ cm}$$

b)

$$\triangle AOC - \text{echilateral} \Rightarrow m(\angle AOC) = 60^\circ$$

$$\triangle OMC : m(\angle M) = 90^\circ$$

$$\triangle OMD : m(\angle M) = 90^\circ$$

considerăm $\triangle OMC$ și $\triangle OMD$

$$MC = MD$$

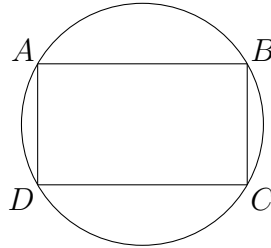
OM - latură comună

$$\left. \begin{array}{l} MC = MD \\ OM - \text{latură comună} \end{array} \right\} \xrightarrow{c.c.} \triangle OMC \cong \triangle OMD \Rightarrow m(\angle MOD) = m(\angle MOC) = 60^\circ$$

$$m(\angle COD) = m(\angle MOD) + m(\angle MOC) = 60^\circ + 60^\circ = 120^\circ$$

Exercițiul 5. În cercul $\mathcal{C}(O, r)$, se consideră coardele paralele AB și CD ($AB \parallel CD$). Punctele sunt așezate în ordinea A, B, C, D pe cerc.

- (a) Demonstrează că arcele cuprinse între coarde sunt congruente: $\widehat{AD} \equiv \widehat{BC}$.
 (b) Arată că $AC = BD$ (diagonalele trapezului înscris sunt egale).



a) Dacă două arce sunt paralele ($AB \parallel CD$), arcele cuprinse între ele sunt congruente. (Teorema arcelor între coarde paralele)
 $\widehat{AD} \equiv \widehat{BC}$

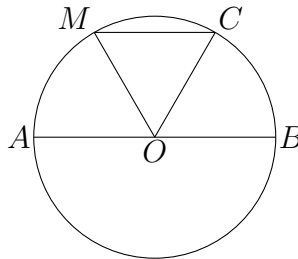
b) Arcurile congruente subîntind coarde congruente:

$$\text{Din } \widehat{AD} \equiv \widehat{BC} \Rightarrow AD = BC$$

$$\left. \begin{array}{l} ABCD - \text{patrulat} \\ AB \parallel CD \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} ABCD - \text{trapez} \\ AD = BC \end{array} \right\} \Rightarrow ABCD - \text{trapez isoscel}$$

Într-un trapez isoscel, diagonalele sunt congruente $\Rightarrow AC = BD$

Exercițiul 6. Pe un cerc se iau punctele A, B, C astfel încât AB este diametru, iar măsura arcului $\widehat{BC}$ este de 60° . Fie M mijlocul arcului mic $\widehat{AC}$. Calculează măsurile unghiurilor triunghiului MOC .



AB - diametru $\Rightarrow \widehat{ACB}$ - semicerc

$$m(\widehat{AC}) = 180^\circ - m(\widehat{BC})$$

$$m(\widehat{AC}) = 180^\circ - 60^\circ$$

$$m(\widehat{AC}) = 120^\circ$$

$$M - \text{mijlocul arcului mic } \widehat{AC} \Rightarrow m(\widehat{MC}) = \frac{120^\circ}{2} = 60^\circ$$

Unghiul la centru $\angle MOC$ are măsura egală cu arcul $\widehat{MC}$

$$m(\angle MOC) = m(\widehat{MC}) = 60^\circ$$

În $\triangle MOC$:

$$OM = OC = r \Rightarrow \triangle MOC - \text{isoscel}$$

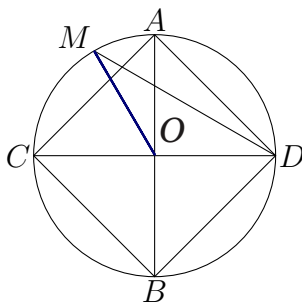
Un triunghi isoscel cu un unghi de 60° este echilateral.

$$\Rightarrow m(\angle OMC) = m(\angle OCM) = m(\angle MOC) = 60^\circ$$

Exercițiul 7. Fie AB și CD două diametre perpendiculare în cercul $\mathcal{C}(O, r)$. Fie M un punct pe arc mic $\widehat{AC}$.

(a) Arată că patrulaterul $ACBD$ este pătrat.

(b) Dacă măsura arcului $\widehat{AM}$ este 30° , calculează măsurile unghiurilor triunghiului MAD .



a)

Patrulaterul $ABCD$ are diagonalele diametre (AB, CD) , deci se înjumătățesc și sunt congruente $\Rightarrow ABCD$ - dreptunghi

$\left. \begin{array}{l} AB - \text{diagonală} \\ CD - \text{diagonală} \\ AB \perp CD \end{array} \right\} \Rightarrow ABCD - \text{pătrat}$

b)

$$\left. \begin{array}{l} M \in \mathcal{C}(O, r) \\ m(\widehat{AM}) = 30^\circ \end{array} \right\} \Rightarrow m(\angle AOM) = 30^\circ$$

$$OA = OM = r \Rightarrow \triangle OAM - \text{isoscel} \Rightarrow m(\angle OMA) = m(\angle OAM)$$

$$m(\angle OMA) + m(\angle OAM) + m(\angle AOM) = 180^\circ$$

$$2m(\angle OMA) = 180^\circ - 30^\circ \Rightarrow m(\angle OMA) = \frac{150^\circ}{2} = 75^\circ \Rightarrow m(\angle OAM) = 75^\circ$$

$\triangle OAD$:

Diametrele sunt perpendiculare $\Rightarrow m(\angle AOD) = 90^\circ$

$$OA = OD = r \Rightarrow \triangle OAD - \text{dreptunghic isoscel} \Rightarrow m(\angle ODA) = m(\angle OAD)$$

$$m(\angle ODA) + m(\angle OAD) + m(\angle AOD) = 180^\circ$$

$$2m(\angle ODA) = 180^\circ - 90^\circ \Rightarrow m(\angle ODA) = \frac{90^\circ}{2} = 45^\circ \Rightarrow m(\angle OAD) = 45^\circ$$

$$\triangle OMD: m(\angle DOM) = m(\angle AOD) + m(\angle AOM) = 90^\circ + 30^\circ = 120^\circ$$

$$OM = OD = r \Rightarrow \triangle OMD - \text{isoscel} \Rightarrow m(\angle OMD) = m(\angle ODM) = \frac{180^\circ - 120^\circ}{2} = 30^\circ$$

Calculăm unghiurile $\triangle MAD$

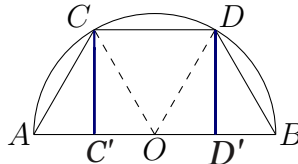
$$m(\angle MAD) = m(\angle OAM) + m(\angle OAD) = 75^\circ + 45^\circ = 120^\circ$$

$$m(\angle MDA) = m(\angle ODA) - m(\angle ODM) = 45^\circ - 30^\circ = 15^\circ$$

$$m(\angle AMD) = m(\angle OMA) - m(\angle OMD) = 75^\circ - 30^\circ = 45^\circ$$

Exercițiul 8. Pe un semicerc de diametru AB se consideră punctele C și D astfel încât coardele AC, CD și DB sunt congruente ($AC \equiv CD \equiv DB$).

- (a) Determină măsura unghiului la centru $\angle COD$.
 (b) Demonstrează că patrulaterul $ACDB$ este un trapez isoscel care are linia mijlocie egală cu $1,5 \cdot r$.



a)

Coardele congruente subîntind arce congruente.

$$AC \equiv CD \equiv DB \Rightarrow m(\widehat{AC}) = m(\widehat{CD}) = m(\widehat{DB})$$

Suma lor este semicercul (180°)

$$3x = 180^\circ / : 3 \Rightarrow x = 60^\circ$$

Unghiul la centru $\angle COD$ corespunde arcului $\widehat{CD}$
 $\Rightarrow m(\angle COD) = 60^\circ$

b) $OC = OD = r \Rightarrow \triangle OCD$ - isoscel și $m(\angle COD) = 60^\circ \Rightarrow \triangle OCD$ - echilateral $\Rightarrow$
 $\Rightarrow CD = r$

La fel, $\triangle AOC$ și $\triangle BOD$ sunt echilaterale ($\angle$ uri la centru de 60°)

$$m(\angle AOC) + m(\angle COD) + m(\angle BOD) = 180^\circ$$

$$\begin{aligned} \triangle AOC - \text{echilateral} &\Rightarrow AC = r \\ \triangle BOD - \text{echilateral} &\Rightarrow BD = r \end{aligned} \quad \Rightarrow AC = BD$$

Construim $CC' \perp AB$ și $DD' \perp AB$

Comparam $\triangle AOC$ și $\triangle BOD$

$$\begin{aligned} AO &= BO = r \\ OC &= OD = r \\ AC &= BD \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} \xRightarrow{\text{L.L.L.}} \triangle AOC \equiv \triangle BOD$$

7

Deoarece triunghiurile sunt congruente, înălțimile corespunzătoare sunt congruente
 $\Rightarrow CC' = DD'$

Punctele C și D se află de aceeași parte a dreptei AB și la distanțe egale $\Rightarrow$
 $\Rightarrow CD \parallel AB \Rightarrow ACDB$ - trapez

$$\left. \begin{array}{l} ACDB - \text{trapez} \\ AC = BD \end{array} \right\} \Rightarrow ACDB - \text{trapez isoscel}$$

Linia mijlocie a unui trapez este semisuma bazelor.

$$l_m = \frac{AB + CD}{2}$$

$$AB \text{ este diametrul cercului} \Rightarrow AB = 2r$$

$$CD = r$$

$$l_m = \frac{2r + r}{2} = \frac{3r}{2} = 1,5r$$