

Lecția 1 - Segmente proporționale

Clasa a 7-a – Capitolul Geometrie

Instrucțiuni

Rezolvă exercițiile de mai jos folosind definiția segmentelor proporționale și Teorema paralelelor echidistante. Durata recomandată: **45 de minute**.

Exerciții

Exercițiul 1. Se consideră segmentele $AB = 12$ cm și $CD = 18$ cm.

- (a) Calculează valoarea raportului $\frac{AB}{CD}$.
- (b) Determină raportul $\frac{CD}{AB}$ și scrie rezultatul sub formă zecimală.

$A \xrightarrow{12} B$

$C \xrightarrow{18} D$

$$a) \frac{AB}{CD} = \frac{12}{18} = \frac{2}{3}$$

$$b) \frac{CD}{AB} = \frac{18}{12} = \frac{3}{2} = 1,5$$

Exercițiul 2. Verifică dacă segmentele AB , BC și DE , EF sunt proporționale în următoarele cazuri:

- (a) $AB = 8$ cm, $BC = 6$ cm, $DE = 12$ cm, $EF = 9$ cm.
- (b) $AB = 10$ cm, $BC = 15$ cm, $DE = 4$ cm, $EF = 5$ cm.

Urm alege raportele $\frac{AB}{BC}$ și $\frac{DE}{EF}$

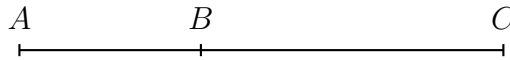
$$a) \left. \begin{array}{l} \frac{AB}{BC} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3} \\ \frac{DE}{EF} = \frac{12}{9} = \frac{4}{3} \end{array} \right\} = \frac{AB}{BC} = \frac{DE}{EF}$$

Segmentele sunt proporționale

$$b) \left. \begin{array}{l} \frac{AB}{BC} = \frac{10}{15} = \frac{2}{3} \\ \frac{DE}{EF} = \frac{4}{5} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{AB}{BC} \neq \frac{DE}{EF}$$

Segmentele nu sunt proporționale

Exercițiul 3. Punctele A, B și C sunt coliniare, în această ordine. Se știe că $\frac{AB}{BC} = \frac{3}{5}$, iar lungimea segmentului AC este de 32 cm. Calculează lungimile segmentelor AB și BC .



$A-B-C$ coliniare

$$AC = 32 \text{ cm}$$

$$\frac{AB}{BC} = \frac{3}{5}$$

Fiind coliniare în ordine, $AC = AB + BC$

$$\frac{AB}{BC} = \frac{3}{5} \Rightarrow 3BC = 5AB \quad / : 3$$

$$BC = \frac{5}{3} AB$$

Notăm $AB = k$

$$BC = \frac{5k}{3}$$

$$AC = 32 \text{ cm}$$

$$k + \frac{5k}{3} = 32 \quad / \cdot 3$$

$$3k + 5k = 32 \cdot 3$$

$$8k = 32 \cdot 3$$

$$k = 4 \cdot 3 = 12 \Rightarrow AB = 12 \text{ cm}$$

$$\left. \begin{array}{l} BC = \frac{5k}{3} \\ k = 12 \end{array} \right\} \Rightarrow BC = \frac{5 \cdot 12}{3}$$

$$BC = 5 \cdot 4$$

$$BC = \frac{20}{2} \text{ cm}$$

Exercițiul 4. Lungimile a trei segmente sunt proporționale cu numerele 2, 5 și 8. Știind că suma lungimilor celor trei segmente este de 60 cm, determină lungimea fiecărui segment.

$$\frac{l_1}{2} = \frac{l_2}{5} = \frac{l_3}{8} = k$$

$$\frac{l_1}{2} = k \Rightarrow l_1 = 2k$$

$$\frac{l_2}{5} = k \Rightarrow l_2 = 5k$$

$$\frac{l_3}{8} = k \Rightarrow l_3 = 8k$$

$$l_1 + l_2 + l_3 = 60$$

$$2k + 5k + 8k = 60$$

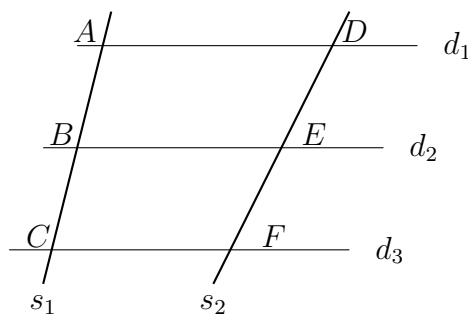
$$15k = 60 : 15 \Rightarrow k = 4 \Rightarrow \begin{aligned} l_1 &= 2 \cdot 4 = 8 \text{ cm} \\ l_2 &= 5 \cdot 4 = 20 \text{ cm} \\ l_3 &= 8 \cdot 4 = 32 \text{ cm} \end{aligned}$$

— l_1

———— l_2

————— l_3

Exercițiul 5. În figura alăturată, dreptele d_1, d_2 și d_3 sunt paralele. Ele intersectează secanta s_1 în punctele A, B, C astfel încât $AB \equiv BC$. Pe secanta s_2 , paralelele determină punctele D, E, F . Știind că $DE = 4$ cm, calculează lungimea segmentului EF și lungimea segmentului DF .



Teorema paralelelor echidistante :

Dacă paralelele determină segmente congruente pe o secantă ($AB \equiv BC$), ele vor determina segmente congruente pe orice altă secantă ($DE \equiv EF$).

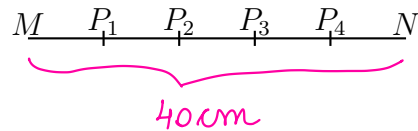
$$\text{Deoarece } DE = 4 \text{ cm} \Rightarrow EF = 4 \text{ cm}$$

$$DF = DE + EF$$

$$DF = 4 + 4$$

$$DF = 8 \text{ cm}$$

Exercițiul 6. Se consideră segmentul MN de lungime 40 cm. Împărțim acest segment în 5 părți congruente prin punctele P_1, P_2, P_3, P_4 (în ordinea M, P_1, P_2, P_3, P_4, N). Calculează valoarea raportului $\frac{MP_2}{P_2N}$.



$$MN = 40 \text{ cm}$$

Segmentul MP_2 conține 2 părți: $M-P_1$ și P_1-P_2

Segmentul P_2N conține 3 părți: P_2-P_3 , P_3-P_4 , P_4-N

$$\begin{aligned} MP_2 &= MP_1 + P_1P_2 \\ MP_1 &= P_1P_2 = \frac{MN}{5} \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad MP_2 = \frac{2MN}{5} = \frac{2 \cdot 40}{5} = 2 \cdot 8 = 16 \text{ cm}$$

$$\begin{aligned} P_2N &= P_2P_3 + P_3P_4 + P_4N \\ P_2P_3 &= P_3P_4 = P_4N = \frac{MN}{5} \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} P_2N &= \frac{MN}{5} + \frac{MN}{5} + \frac{MN}{5} \\ P_2N &= \frac{3MN}{5} = \frac{3 \cdot 40}{5} = 3 \cdot 8 = 24 \text{ cm} \end{aligned}$$

Putem calcula raportul prin 2 metode:

1. Folosind părțile:

$$\frac{MP_2}{P_2N} = \frac{2MN}{3MN}$$

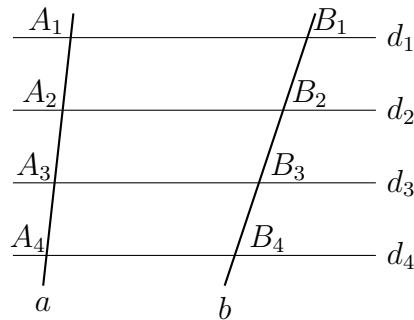
$$\frac{MP_2}{P_2N} = \frac{2}{3}$$

4

2. Înlocuind valorile segmentelor:

$$\frac{MP_2}{P_2N} = \frac{16}{24} = \frac{2}{3}$$

Exercițiul 7. În figura alăturată avem $d_1 \parallel d_2 \parallel d_3 \parallel d_4$. Pe secanta a avem segmentele congruente $A_1A_2 \equiv A_2A_3 \equiv A_3A_4$. Pe secanta b , lungimea segmentului B_1B_4 este de 27 cm. Calculează lungimea segmentului B_2B_3 .



Deoarece dreptele d_1, d_2, d_3, d_4 sunt paralele și determină pe secanta a segmente congruente $A_1A_2 \equiv A_2A_3 \equiv A_3A_4$, putem aplica Teorema paralelelor echidistante.

Rezultă că $B_1B_2 \equiv B_2B_3 \equiv B_3B_4$

$$B_1B_4 = B_1B_2 + B_2B_3 + B_3B_4$$

$$B_1B_2 \equiv B_2B_3 \equiv B_3B_4$$

$$B_1B_4 = 3 B_2B_3 \quad /: 3$$

$$B_2B_3 = \frac{B_1B_4}{3}$$

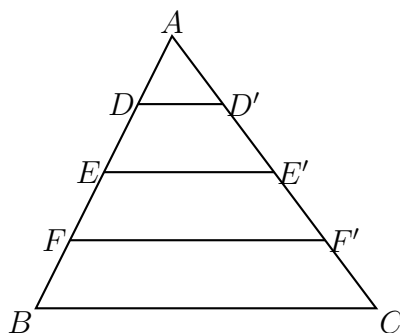
$$B_2B_3 = \frac{27}{3}$$

$$B_2B_3 = 9 \text{ cm}$$

Exercițiul 8. Fie triunghiul ABC cu latura $AB = 20$ cm și $AC = 24$ cm. Punctele D, E, F aparțin laturii AB astfel încât $AD \equiv DE \equiv EF \equiv FB$. Prin punctele D, E, F se duc paralele la latura BC , care intersectează latura AC în punctele $D', E',$ respectiv F' .

(a) Determină lungimea segmentului AE' .

(b) Calculează lungimea segmentului $E'C$.



a) $AD \parallel EE' \parallel FF' \parallel BC$

Obs.: Deoarece pe scanta AB aceste paralele determină segmente congruente ($AD \equiv DE \equiv EF \equiv FB$), conform Teoremei paralelelor echidistante, ele vor determina și pe scanta AC segmente congruente.

Deci: $AD' \equiv D'E' \equiv E'F' \equiv F'C$

AC este împărțit în 4 părți egale.

$$AD' = \frac{AC}{4} = \frac{24}{4} = 6 \text{ cm}$$

$$D'E' = AD' = 6 \text{ cm}$$

$$AE' = AD' + D'E' = 6 + 6 = 12 \text{ cm}$$

b) $E'C = E'F' + F'C$
 $E'F' = \frac{AC}{4} = \frac{24}{4} = 6 \text{ cm}$

$$F'C = E'F' = 6 \text{ cm}$$

$$E'C = 6 + 6 = 12 \text{ cm}$$